高等学校教学用書



振动理論引論

上册

C. П. 斯特列可夫著
何文蛟譯

高等教育出版社

本書系根据苏联技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯特列可夫（С. П. Стрелков）著“振动理論引論”（Введение В Теорию Колебаний）1951年版譯出，原書經苏联高等教育部审定作为高等学校的教科書。

中譯本分二册出版，本書为上册，內容講解具有一个自由度的系統的振动以及其应用。

本書由何文蛟同志譯出，林金銘同志校訂。

振动理論引論

上册

С. П. 斯特列可夫著

何文蛟譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第〇五四号）

京华印書局印刷　　新华書店总經售

統一書号13010·207　開本 850×1168 1/32　印張 7 2/16　字數 166,000

一九五六年十二月北京第一版

一九五六年十二月北京第一次印刷

印數 00001—10,000　　定價（8）￥0.85

目　录

序

决定本書內容的主要材料，是作者于1944—1949年間在荣膺列宁勳章、以M.B.罗蒙諾索夫命名的国立莫斯科大学物理系任教时，講授振动理論一般課程的講义。

这課程是研究振动理論專門部分的一个引論，它的目的，不仅要使学生从技术与物理中的最常見实例来認識振动过程的基本規律，并且要使学生学会最簡單的振动系統的理論研究和計算的初步方法。

物理系振动教研室二十年来教授振动理論課程所积累的科学傳統，在一定程度上，决定了本書的材料的取舍和基本原理問題的叙述方式。

第一次关于振动理論的課程，是Л.И.曼杰尔席塔姆院士在莫斯科大学講授的。

在修改本課程时，我采納了我們教研室的同志們的，特別是К.Ф.杰阿多尔奇克教授的一些建議，并接受了В.В.米古林教授在讀完本書原稿后，所提出的一些批評。在准备原稿时，承Г.А.本得里可夫和Н.К.米赫也夫給我很多的帮助。

謹趁此机会，对他們表示我深切的謝意。

——作　者——

緒　論

不論哪一种技术領域里，不論哪一个物理部門里，都会碰到某种程度的振动过程。無綫电技术、交流电工学以及某些其他的技术部門，全部都是建筑在利用振动过程的基础上的。在物理学的光学、声学、力学、电学以及原子理論中，我們更处处碰到振动过程。

發生振动的各种过程的物理本質是不相同的；譬如：鉄路桥梁的振动与电迴路中电流的振动 ㊀，就是完全不同的兩种現象。然而，即令是对某些种情形中的振动規律有一点粗淺認識，也会看出：在这些所謂振动过程中，有很多共同之处。对物理与技术中所碰到的振动过程的詳細分析指出：在所有的情形下，振动的基本規律是一样的。振动規律的这一普遍性，就某种意义来說，促使我們把它划分出来作为一个独立的科学部門来研究，并得到了振动理論的名称，因此振动理論这一課程的任务，乃是用統一的观点，来研究在各式各样的物理現象中以及技术設备中所遇到的振动过程。

我們可能碰到的一切振动过程，可按照其外在特征(按照过程中某一量随时間变化的規律特性和形式来分类，这种分类可称为动的分类(按“动”字的广义来說)。

首先可將所有在物理及技术中实际上遇到的振动过程，分为兩类：周期的和非周期的。在理論上具有重大意义的还有中間的一类——近似周期运动。

所謂周期过程，是这样的一种过程，在这种过程中，任一瞬間

㊀ 譯者注：在电学中一般称为振蕩，本書为一致起見仍称振动。

的振动量，經过一定的一段时間 T 后又具有同样的值。周期函数的数学定义是：当变数大为任何值时，如果有这样一个常数 T，能使

$$f(t+T)=f(t).$$

那末函数 $f(t)$ 称为具有周期 T 的周期函数。所有不满足上式所表示的周期条件的其他函数，可称为非周期函数。

近似周期函数具有下列性質：即在任一瞬間 t 时，

$$|f_1(t+\tau)-f_1(t)|\leqslant\varepsilon.$$

其中 τ 及 ε 为常数。τ 值一般是 ε 的函数，并称之为近似周期。如果量 ε 和函数 $f_1(t)$ 的模量在时間 τ 內的平均值比起来，显得很小，那末，就可以認为近似周期函数在某一段时間实际上接近于周期函数。例如：函数

$$f_2(t)=\cos t+\cos\sqrt{2}\,t$$

是一个近似周期函数。但是如果近似地令 $\sqrt{2}=1.4$，那末，在时間 t 的有限的一段上，函数 $f_2(t)$ 可以看作是周期等于 10π 的周期函数。

在周期运动的类型中，諧振动或者正弦振动占着重要的地位，在这种振动中物理量随时間所进行的变化，类似于兩个簡單三角函数中的任一个——正弦函数或余弦函数。

非周期振动比周期振动的式样要多得多，現在我們仅仅指出那些在振动理論中最常遇到的。

“阻尼”的(或者“增長”的)“正弦”和有限运动　按照“阻尼的正弦”規律的振动，有时称为“阻尼諧”振动，如圖 1, *a* 所示，其数学的表达式如下：

$$Ae^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi),$$

其中 A,φ,δ 以及 ω 为常数，t 为时間。“增長諧”振动則如圖 1, *б* 所示。在数学上，它們之間的区别只在 δ 的符号。严格的講，关于

这样的振动应該这样叙述：阻尼(或者增長)振动，在 δ 的値足够小时，接近于諧振动，因此“阻尼的正弦”或者“阻尼諧振动”的說法不十分合邏輯，諧振动不可能是阻尼的。然而由于通用，我們仍沿用这种称呼。

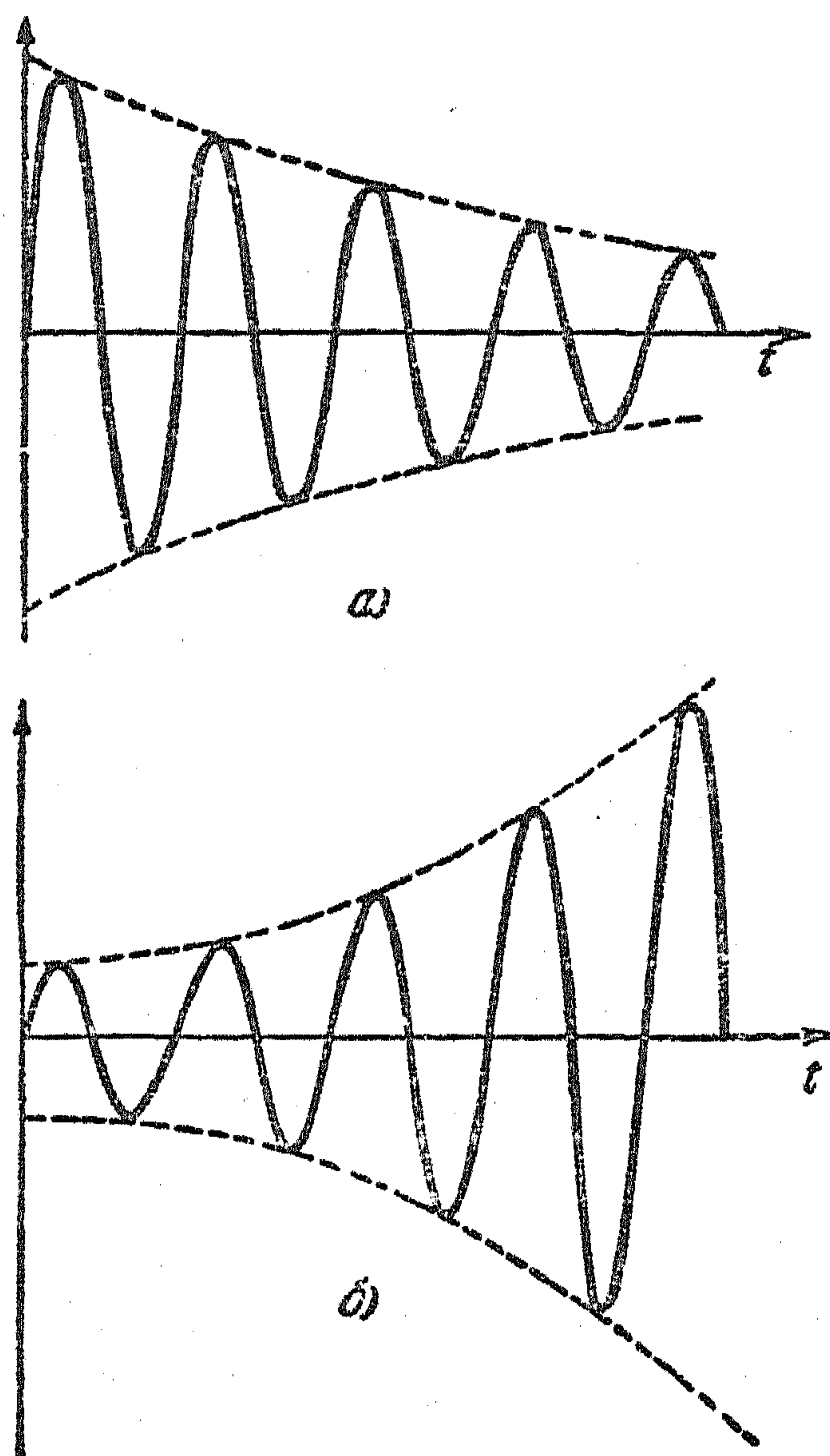


圖 1.

有限运动的一些典型例子，如圖 2 所示。它們表示量的这样一种变化：变量逐渐地趋于某个極限的恒定値；在数学上，有限运动可能具有这种形式，例如：

$$(Ae^{-\alpha t}+Be^{\alpha t})e^{-\lambda t},$$

其中 A, B, α 及 λ 是实数，并且 $\lambda>\alpha$。

單單列举振动过程的外在的特征，对于它的分析与系統化，还十分不够。因此，我們將按照那些正在进行振动的系統的基本物理特征，来对振动进行分类。正在进行振动的系統称为振动系統。

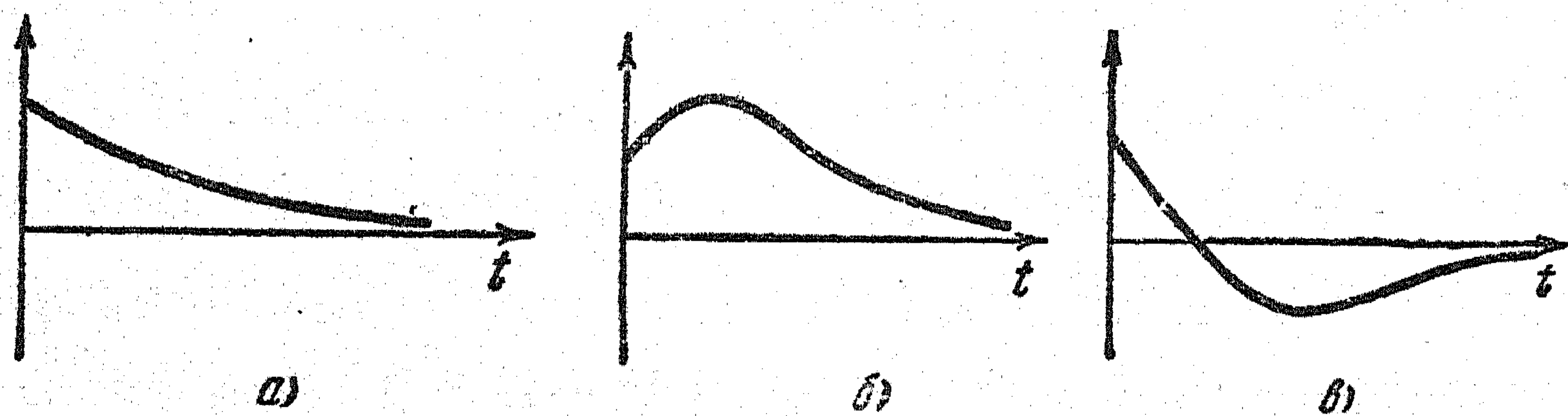


圖 2.

首先指出，本書的全部材料系按照發生振动的系統的复杂程度分为三部分：

1. 在具一个自由度的系統中的振动。

2. 在具多个自由度的系統中的振动。

3. 在具無穷个自由度的系統中的振动。

第一部分中所指出的，是关于所有振动理論中最簡單的、初步的、同时也是基本的、重要的过程，因此它占了本書的很多篇幅。在第二及第三部分中討論比較复杂的过程，然而这些过程彼此在实質上差別很小。

在每一部分，应該討論振动現象的四种可能的类型。

1. 固有振动;

2. 受迫振动;

3. 参数振动;

4. 自动振动。

固有振动發生于經过了外来扰动（“冲击”）后的隔离系統中。振动过程的特性，基本上仅仅由系統的內力来决定，这种內力依存于系統的物理構造。在激励振动的起始瞬間，由外界供給其所必需的能量。

受迫振动發生于一定周期性外力的作用下。这力的作用不依存于系統中的振动。过程的特性不仅由系統的特性决定，并在很大程度上依存于外力。振动能量由給出外力的能源供給。

参数振动与受迫振动的区別在于外来作用的方式。受迫振动时，由外面供給力或者某种別的量来产生振动，此时，系統本身的参数則保持恒定。参数振动是由外面使系統的某个物理参数（例如質量）产生周期变化所引起的。

自动振动發生于沒有外来周期作用的系統中。振动特性唯一地决定于系統的設备。用来抵偿振动时变成热的能量損失的能量来源，通常是系統的不可分割的一部分。

另一方面，所有的振动过程还可以这样地分为兩类：在綫性系統中的振动和在非綫性系統中的振动。凡振动的基本規律用綫性

微分方程式表示的系統，称为綫性系統。显然，非綫性系統是那些基本規律由非綫性微分方程式表示的系統。由于沒有解非綫性微分方程式的正規方法，使得非綫性振动系統的分析非常复杂。綫性及非綫性振动系統中的过程之間的区别归結到：按照特殊的步驟来分析綫性系統中的振动时，可对該系統中所有可能的过程，作出完全确定的結論，而这对于在非綫性系統中的过程，一般則不可能作出。因此，非綫性系統的振动理論是相当复杂的，普通能解决的只是屬于非綫性系統的一定形式的問題。然而非綫性振动的理論，对于我們却是重要的，因为所有的自动振动系統，根本都是非綫性系統。

有时把振动理論的科目，列入数学的課程內。然而这是不十分正确的；振动理論是一个独立的科学部門，因为它的各种应用彼此間是这样紧密的联系着，以致不仅在数学上，而主要的是物理上必須用統一的观点来研究它。用統一的物理观点来研究在不同系統中的振动，大大地方便了分析研究某些振动过程，在这些振动过程中，一些不同的物理量的振动，例如电学量和力学量的振动，都存在着規律的关系。在技术与物理中这样的設备是越来越常見了。此外，用統一的观点来研究振动过程，可以培养学生用类比的方法来分析現象的能力，而这对于研究在技术上常会碰到的未曾研究过的新过程时，是極其有用的。

振动理論，作为一个物理科学部門，是最近才成立起来的，它研究有关在物理与技术中所碰到的各种振动过程。它是在各种科学与技术領域內許多振动研究的基础上产生并發展起来的。

由于偉大的学者 A. C. 波波夫發明了無綫电——它是技术上最大規模利用振动过程之一——科学家們面临了一系列的嶄新的任务，这些任务也使得我們有必要將振动理論發展为一个物理科学部門。

在振动理論中，决定它發展的基本研究工作，是由俄国学者所完成的。特别应該指出的是 Б. Б. 戈李兹院士同 A. H. 克雷洛夫院士在研究受迫振动及固有振动方面的工作。在 Б. Б. 戈李兹的工作中，只要看看出版于 1912 年的，他的名著"測地震术講义"，就可以看到这位学者所完成的工作范圍。这講义直到現在还沒有失掉它的意义，并代表着应用受迫振动理論来解决复杂的測地震术問題的典范。

A. H. 克雷洛夫院士于 1898 年所發表的著作，关于船的顛簸以及由机器运行所引起的船的振动，是广泛研究受迫振动及固有振动的軔始，已故的 A. H. 克雷洛夫畢生从事这种研究，后来由他的学生繼續作下去。1913 年出版的 A. H. 克雷洛夫所著的教本"論应用于技术問題中的某些数学物理的微分方程式"特别清楚的指出：当研究振动过程时，数学同技术問題彼此間是多么紧密的交融着，因此这本書是每一个認眞研究振动的人所必讀的書。

無綫电技术的發展，在振动理論面前提出了一些新的任务：研究無阻尼振蕩器的工作；建立調制、檢波理論以及無綫电振动理論等等。这些任务是由于發展祖国無綫电技术、無綫电通信、無綫电广播的迫切需要所提出的，这些需要在十月革命后不久，曾陈述于 B. И. 列宁致 M. A. 波奇-伏隆叶維奇的那封有名的信中。

苏联的科学家和工程师：A. И. 伯尔格及 M. B. 蕭列依金院士，M. A. 波奇-伏隆叶維奇教授等，完成了無阻尼振蕩器的理論計算方法；而調制設备的計算方法，曾由 И. Г. 克雅齐金、A. A. 敏茨等作出。至于在無綫电振动电路中現象的詳細分析，則由 Б. П. 阿謝也夫教授等所作出。

約在二十年前，莫斯科大学教授 Л. И. 曼杰尔席塔姆开始在物理数学系講授振动理論这一課程，并成立了研究振动的專業和实驗室。

以 Л. И. 曼杰尔席塔姆及 Н. Д. 巴巴列克斯院士为首的研究理論無綫电問題的苏联物理学家們，曾創造了关于自动振动的学說。“自动振动”这一名詞本身，就是首先由 А. А. 安德罗諾夫引入科学的，他以俄国偉大的数学家 А. М. 雅甫諾夫及法国科学家 А. 邦加萊的著作为基础，提供了分析自动振动系統的严密方法。在 1937 年出版的，由 А. А. 安德罗諾夫及 С. Э. 哈依金合著的“振动理論”一書中，叙說了这些方法及其应用。

在發展上述方法的同时，这一学派的科学家們：А. А. 安德罗諾夫，С. Э. 哈依金，А. А. 維提，Г. С. 哥列里克，С. М. 雷多夫，В. В. 米古林等，曾对在实际上很重要的振动理論的問題，进行了一系列的研究。

差不多同时(1928—1934)，当 Н. М. 克雷洛夫院士与 Н. Н. 波果柳波夫教授，在基輔研究推广符号方法在振动理論中的应用时，曾提出了分析非綫性自动振动系統的嶄新方法，用这种方法，可以解决当研究自动振动时所产生的全部問題。这一方法的基本內容，叙述在 1934 年出版的，由 Н. М. 克雷洛夫与 Н. Н. 波果柳波夫合著的“非綫性力学的新方法”一書中。

在技术中获得广泛流傳的計算非綫性無綫电系統的方法，即所謂准綫性方法，大部分系由苏联科学家 М. А. 波奇-伏隆叶維奇及 Ю. Б. 柯輔查列夫等所改进并确定的。

上述的这些研究自动振动系統的方法，除了准綫性方法以外，都需要比較繁瑣的工具，这便妨碍了它們在技术計算中的广泛应用。

因此，К. Ф. 杰阿多尔奇克教授曾提出分析非綫性自动振动系統的簡便方法，称为能量方法。能量方法在解一系列实际問題中应用的推广，叙述在 К. Ф. 杰阿多尔奇克教授 1945 年出版的“自动振动系統”一書中。

最近由于 Б. В. 布尔加可夫教授的工作，对分析自动振动問題的方法，又有所改进。

在苏联，振动理論得到了广大的發展。可是最近期間在这門科学上，資产阶級的科学家們实际上沒有什么新的成就，其中的一部分人（范德波等人），甚至已淪为反动帝国主义的奴才。在我們苏联，为了进一步改进社会主义的工業，出現了关于振动理論的新的巨大的工作。

說到这里，应該首先提到 А. А. 安德罗諾夫院士及許多科学家关于自动調整理論方面的著作，很多人由于他們的作品，得了斯大林奖金，这些作品都是直接为了进一步發展各技术部門的自动化，并使最复杂与繁重的生产过程能全盤机械化，从而建立起新型的具有高度生产力的共产主义工業。

各种新的技术部門的研究成果也丰富了振动理論，在这些技术部門中，振动过程，特別是無綫电振动过程，占有重要的地位。

第一編　具一个自由度的系統中的振动

第一章　具一个自由度的綫性系統中的固有振动

§1. 系統的自由度数的定义

自由度数是为了全面描述系統里的过程所必需的独立变数(量)的个数。然而在研究一个物理的系統时，这些变数的确定，有时是一个相当复杂的問題。因为严格說来，我們所碰到的总是具有無穷个自由度数的系統。現在用一个簡單的例子来說明这一点。

一个悬在綫上的物体(圖 3)，这个“最簡單”的振动系統有多少自由度呢？

这一問題的答案旣取决于系統的物理特性，也要看我們所着重研究的是系統中的那些过程。

如果我們仅仅研究这样的运动：其中綫不变形，即总是笔直的，并且保持恒定的長度；再，假如物体的大小与綫的長度比起来，显得很小，以致物体相对于綫的运动，不占重要地位；假如物体中某一点相对于其余各点的运动，同样的不关紧要，那末，便可以把这系統看作是一个数学摆，看作是一个具有兩个自由度的系統。

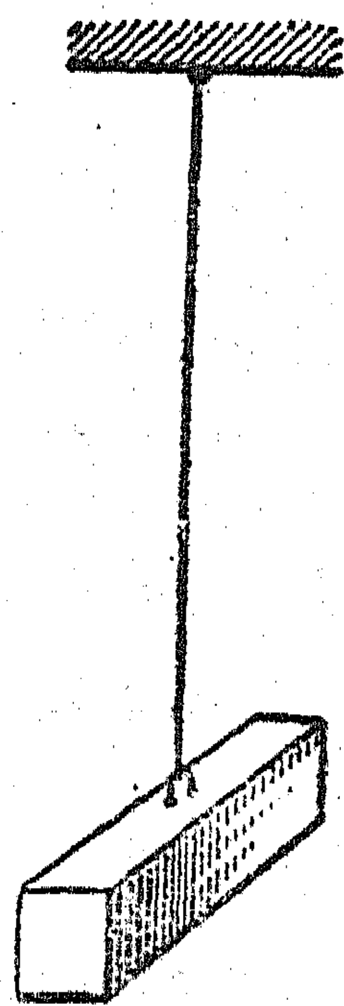


圖 3.

在这种情况下，物体可以用一个具有質量的点来代表，而綫可

用一个沒有質量的、不变形的杆来代表。質点可沿着球面运动，为了唯一地确定它的位置，只要知道兩个独立坐标就够了。借助于这种方案，我們只对綫上物体一定的振动进行研究。

此外，如果还給定这样一种起始条件——在振动时間內，綫將始終位于一定的平面上。那末，这种方案將是具有一个自由度的系統的方案。

因此，为了分析实际物理系統中的过程，在預先給自己一些条件作为限制后，我們选擇了一定的方案。应該記住，这方案虽然只是在一定的限度內，在一定的条件下反映着現象，然而，它却对該运动提供一个正确而完全的描述。这描述是用方案里面出現的坐标来作的。

但这里就發生了一些問題：如何选擇所需的坐标？如何确定，在这种情况下，用选定坐标来描述的运动可以被分离出来研究？

只有实驗，所給方案的数学分析結果与实驗結果的比較，以及物理的观察，可以使我們确信，所选用的坐标，所选用的方案的正确性。詳細的物理分析，以批判的态度对待方案，以及深入研究系統中發生的过程，可以对坐标选擇的正确性，作出肯定的判断。

为了弄清这里所牵涉的問題，可举这样一个例子。选好一个如前面所叙述过的数学摆的方案，在振动时，我們未作特别考察，曾把綫的張力忽略掉，而实际上这張力总归是存在的。但它一般很小，因而在物体振动时不显示什么重要的影响。然而，大家知道，也有这种微小張力不能忽略的情形。在这种情形下，即令还給摆以这样的起始条件：即摆"应該"在平面上振动，及物体"应該"几乎沿着圓弧运动，而实际上振动將完全不是这个样子。由綫的張力所引起的振动，將要增强起来，經过了相当时間，这种振动的能量，就大小說来，与摆上物体的振动能量开始可以比拟，甚至整个原来儲藏的能量，都会变成由綫的張力所引起的振动的能量。因

此，在这种情况下，我們所选用的一个自由度的系統的方案，就不适用了。

然則，在这种情况下，到底应該怎样来进行研究？以及如何来区别这些情形呢？——只有研究振动过程及系統的特性，才能在这些問題上作出答案。

§2. 具一个自由度的守恒系統中的固有振动

在隔离了的机械系統和电气系統中，运动过程总伴随着能量的耗散——动能轉变成热能。如果在某一瞬間把能量儲藏于系統中，那末經过一些时間后，在这隔离了的系統中，其全部儲藏的能量都会轉化为热，这时我們所感兴趣的运动过程也將終止。因此，在外来的冲击以后，固有振动固可存在于系統中，但它总是会逐漸減弱的，或者所謂阻尼的。

然而由于在理論上的重要，却得先研究守恒系統中的振动，在这种理想的系統中，其所儲藏的机械能（或者电磁能或者兩种一起）保持恒定。至于实际系統，这样的系統在振动时能量总是要轉变为热的，我們則称之为非守恒的。

研究守恒系統中的过程，从兩种观点看来显得重要：首先，在具有微小阻尼的实际系統中，其过程接近于守恒系統中的过程；其次，研究它，可以使我們明了实际系統中不同参数所起的作用。因此讓我們暫时撇开力学中的摩擦力，电学中的电阻等等，从研究守恒系統开始。讓我們由一个最簡單的例子来研究固有振动的基本規律。

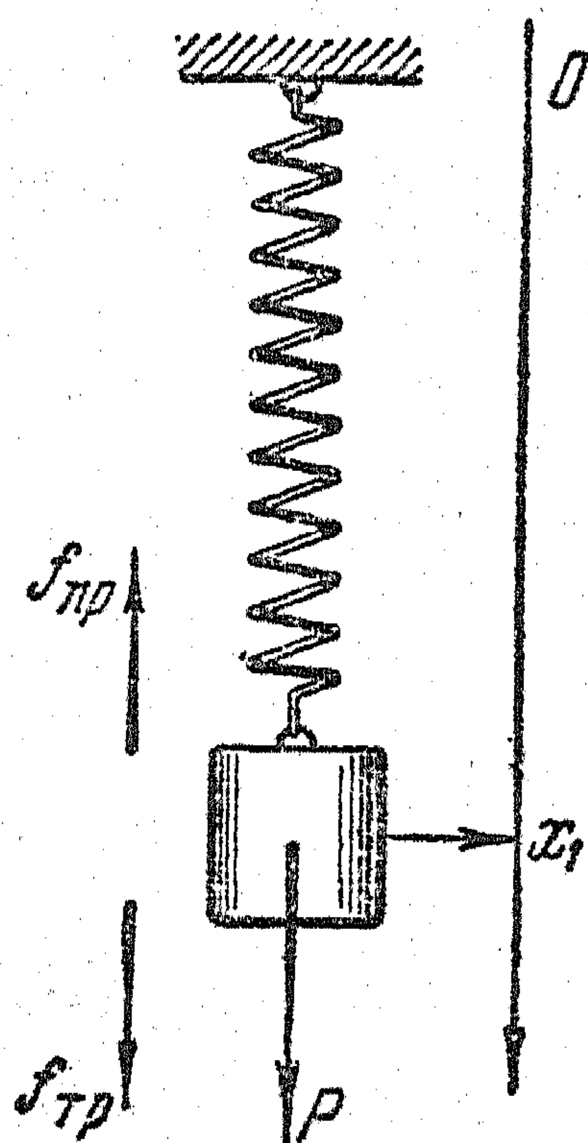


圖 4.

設在無荷重的狀态下，于長度为 l 的彈簧上，悬一質量为 m 的物体（圖 4）。試研究在

冲击后，由于彈力与重力的作用，物体發生的鉛直运动。运动的定律可以写为：

$$m\ddot{x}_1=-f_{\text{пр}}+f_{\text{тр}}+P,$$

其中 $f_{\text{пр}}$ 是彈力，P 是常数重力，$f_{\text{тр}}$ 是摩擦力。这种系統的守恒条件是 $f_{\text{тр}}=0$。假定彈簧的質量这样小，以致在振动时可以略去不計——这只是在一定的情况下才接近于实际。因而我們以后將認为：在过程中，$f_{\text{пр}}$ 只由彈簧的形变决定，只由坐标 x_1 决定。

如果彈力 $f_{\text{пр}}$ 是 x_1 的單値函数，彈簧就是理想的彈性体。若以 x_0 表示物体在平衡位置时的坐标，那末，彈力的依存規律，在对应于坐标 x_0 的値的附近，可展开成泰勒級数：

$$f_{\text{пр}}=f_{\text{пр}}(x_0)+(x_1-x_0)k+(x_1-x_0)^2b+\cdots,$$

其中 k 同 b 是常数。实驗的数据指出，不大的振动总可以用泰勒級数的前面几項来限定。如果 $f_{\text{пр}}(x)$ 的依存关系，在 x_0 点附近的可能振动的区域内，可以用直綫代表，那末在任何振动的情况下，彈力可認为是

$$f_{\text{пр}}=f_{\text{пр}}(x_0)+k(x_1-x_0),$$

这也就是：在平衡狀态附近，彈力与形变之間存在着綫性关系。

选用新坐标 $x=x_1-x_0$，即將坐标系統的原点移到平衡位置，在这里 $f_{\text{пр}}(x_0)=P$。那末，运动方程式可写为：

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{2.1}$$

或

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0,\quad \ddot{x}+\omega^2x=0, \tag{2.2}$$

其中 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$。

所以 ω^2 是标明系統振动特性的唯一的物理参数。

大家知道，这个微分方程式的解具有下列形式：

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t, \tag{2.3}$$

其中A及B为由起始条件决定的常数。对平衡位置的歧离，將隨时間作频率为ω的正弦振动或者諧振动。

振动周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$或

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{2.4}$$

右列一量

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.5}$$

称之为系統的固有圓頻率，以区别于普通頻率，普通頻率等于單位时間內完整的振动次数。頻率n等于$\frac{1}{T}$。如T以秒計，則n以赫計。

k这一量称为彈簧的"剛度"，其因次为达/厘米或者千克(重)/厘米等等。k在数值上等于使彈簧产生單位長度的形变所必需加于其上的力。

因此固有振动的周期，决定于系統的質量和剛度的比率。

在具有一个自由度(沒有摩擦)的、簡單的綫性系統中，所有情形下的固有振动都一定是諧振动。振动頻率則决定于系統的参数。固有頻率的計算总归結到去确定一些量，这些量与所研究的例子中的k和m相对应。

在下面一些簡單的例子中，对于微小振动，熟悉其固有頻率的确定是有益的。

1. 位于平面上的"数学"摆的振动(圖5)。在平衡位置附近的小振动的方程式为：

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0,$$

其中φ是偏角，g是重力加速度，因而

$$\omega^2=\frac{g}{l}.$$

2. “物理”摆——圍繞水平軸 O 自由旋轉的物体(圖 6)。物体具有对于旋轉軸的轉动慣量 I，質量为 m，从旋轉軸至重心的距离为 a。則在平衡位置附近的小振动方程式为:

$$\ddot{\varphi}+\frac{mga}{I}\varphi=0,$$

故
$$\omega^2=\frac{mga}{I}.$$

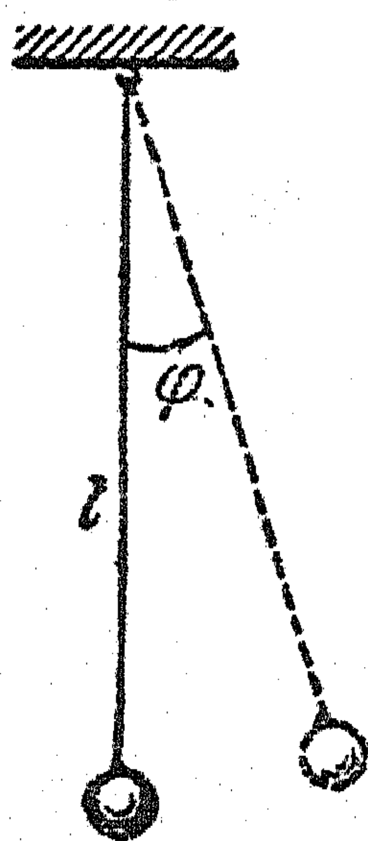


圖 5.

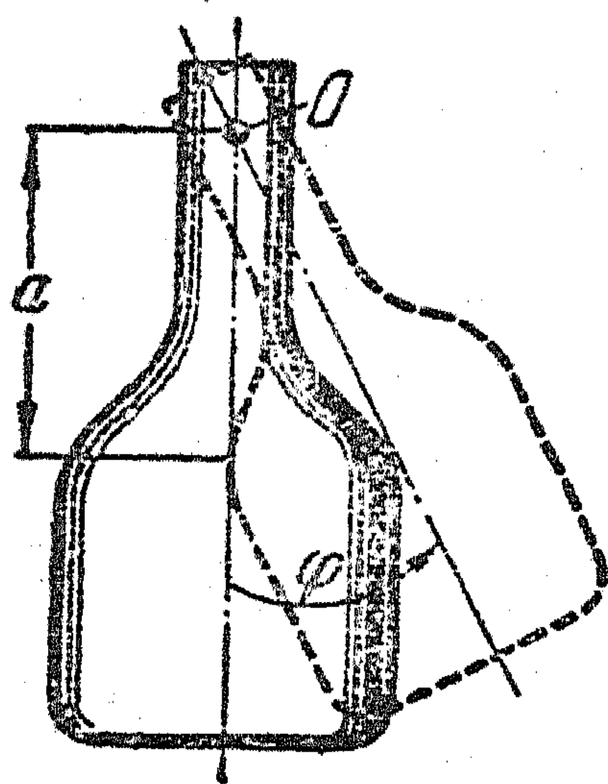


圖 6.

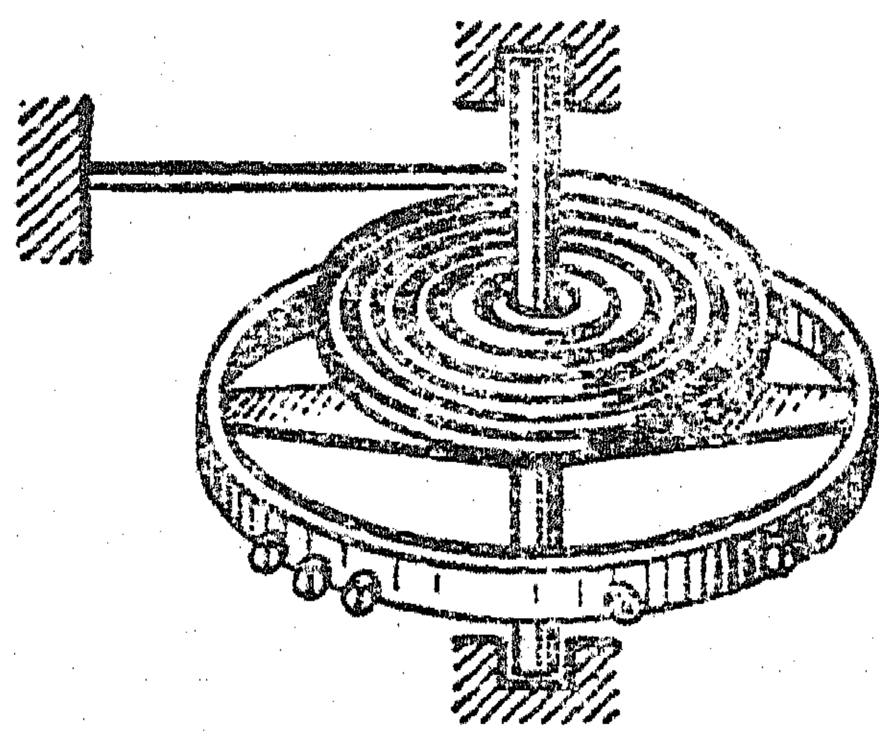


圖 7.

3. 挂錶的摆(圖 7)，扭摆——由于蜷簧的彈性而圍繞鉛直軸作振动的对称物体。若物体对于鉛直軸的轉动慣量为 I，彈簧的角剛度为 c，那末 $\omega^2=\dfrac{c}{I}$。

彈簧的角剛度由等式 $M=-c\varphi$ 来决定，其中 M 是当物体扭轉 φ 角时彈簧作用于物体上的力矩。[c]的因次是千克(重)厘米/弧度。

4. 电振动迴路系由串联的电容器及电感綫圈所組成(圖 8)。假如用 I 代表迴路中的电流，用 L 及 C 分別代表电感量与电容量，那末迴路电压的方程式是

$$L\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}\int Idt=0,$$

或
$$L\ddot{I}+\frac{1}{C}I=0,$$

或
$$\ddot{I}+\frac{1}{LC}I=0. \tag{2.6}$$

上式为具有頻率 $\omega=1/\sqrt{LC}$ 的諧振动方程式。

計算 ω 时，須在同一个量度系統中取 L 及 C，例如若 L 用亨利，則 C 用法拉等等。

5. 亥姆霍兹共振器——声共振器(圖 9)。当一具有大頸的容

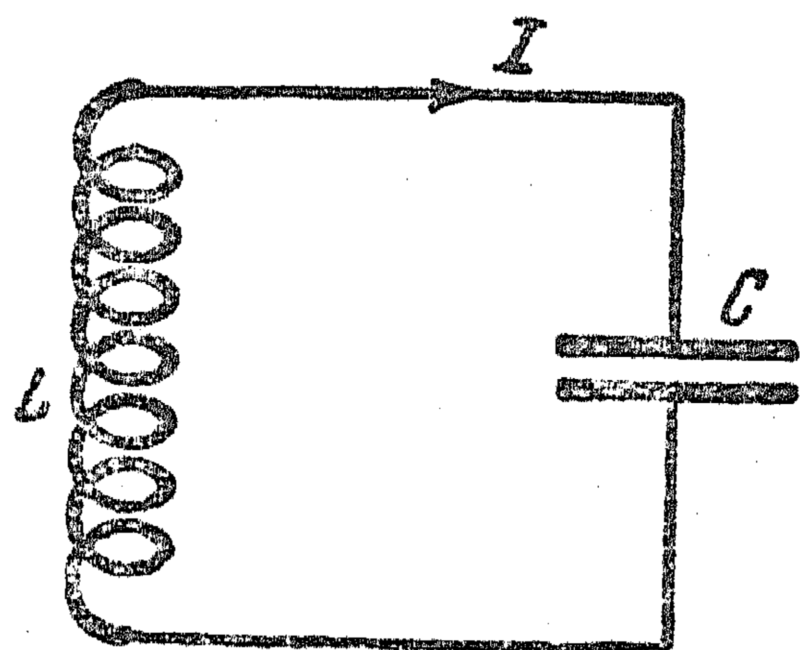


圖 8.

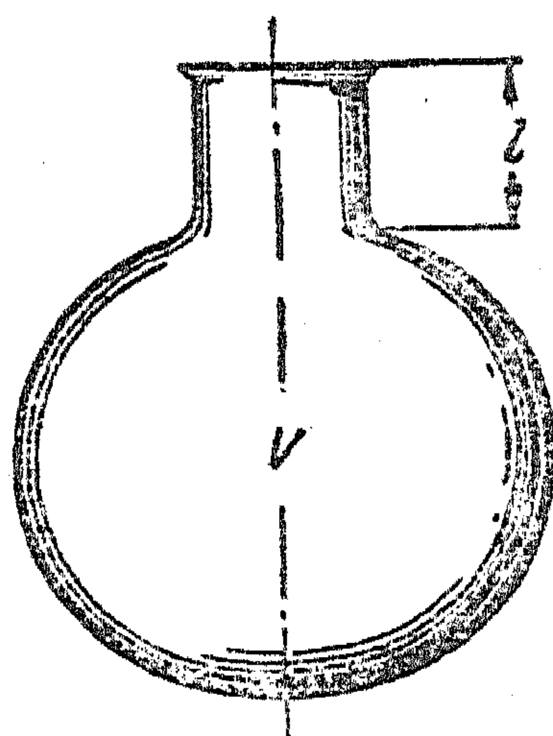


圖 9.

器中發生空气振动时，容器頸部的空气可以近似地看作是一个質量为 $m=\rho Sl$ 的塞子，其中 ρ 是空气的密度，S 是頸的截面积，l 是頸的長度。如果設想具有这一質量的空气由平衡位置作大小 x 的移动，則在体积为 V 的腔部，其压力由大气压 p 作大小为 $\Delta p=-\varkappa p\Delta V/V$ 的变化，这里 $\Delta V=Sx$。在計算压力的变化时，我們假定压力与体积間的关系是由絕热定律决定的，而 $\varkappa$ 是絕热指数，因而当振动时，頸部的空气質量的运动方程式，可以写成：

$$m\ddot{x}=\Delta p\cdot S,$$

或
$$\rho Sl\ddot{x}+\varkappa\frac{pS^2}{V}x=0,$$

或
$$\ddot{x}+\frac{\varkappa pS}{\rho Vl}x=0.$$

我們又一次得到諧振动的方程式。

如果考慮到音速 $c=\sqrt{\varkappa p/\rho}$,那末,共振器的固有圓頻率是:

$$\omega = c\sqrt{\frac{S}{lV}}. \tag{2.7}$$

我們把頸部的空气当作"質量";而把腔部的空气当作"彈簧"。应該注意的是:这种处理是十分近似的,但却很有啓發性。

在諧振动时,頸部所有的質点也和腔部所有的質点一样,在运动着,但速度与位移則各不相同。在頸部所發生的質点的位移,要比在腔部所發生的大些,因此当把腔部的質量略去时,我們便撇开了腔部空气的动能,而只計其压縮的能量。相反地,对于頸部的空气,我們則忽略其压縮能量,而只計算其动能。

只有借腔部空气振动的精确理論(把它当作具有無穷个自由度数的系統)才可以决定誤差的大小。

我們建議由学生独立地进行下列簡單系統的分析,这样做是有益的。

1. 一粒小珠位于一無重量但有恒定張力的弦上,弦的一端固定,另一端跨过滑車假定"無重量"并悬一重物(圖10)。横振动相当小,以致重物的运动可以不計。

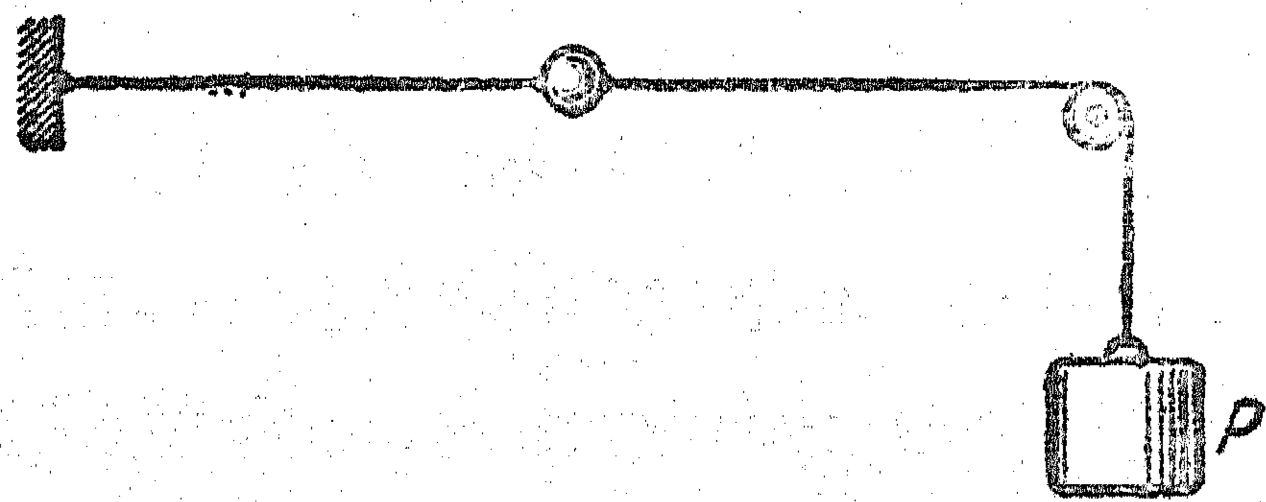


圖 10.

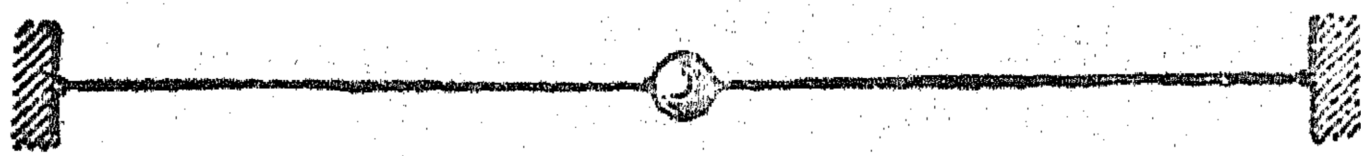


圖 11.

2. 一粒小珠位于兩端固定而拉紧的弦上(圖11)。

設弦的張力与其形变成正比,試研究上述兩情形的微小横振动。

3. 連通器中的振动。

設兩容器的横断面相同,試研究在連通器中流体柱的鉛直振动;然后,設横断面不同,解同样的問題。

4. 一只磁針,中点悬于綫上,外磁場是水平的,綫"無重量"但有彈性(圖12)。試研究其振动。

5. 一枝質量均匀的小棍,兩端悬在"無重量"及"無張力"的綫上(圖13)。

試研究此棍的微小水平扭轉振动。

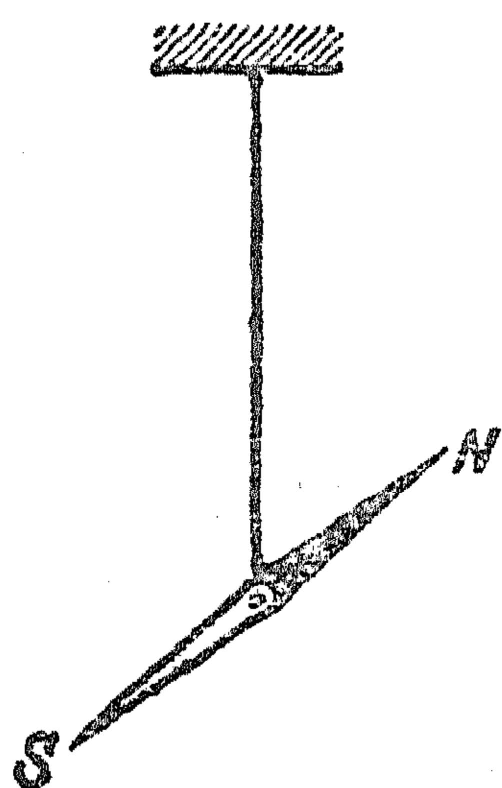


圖 12.

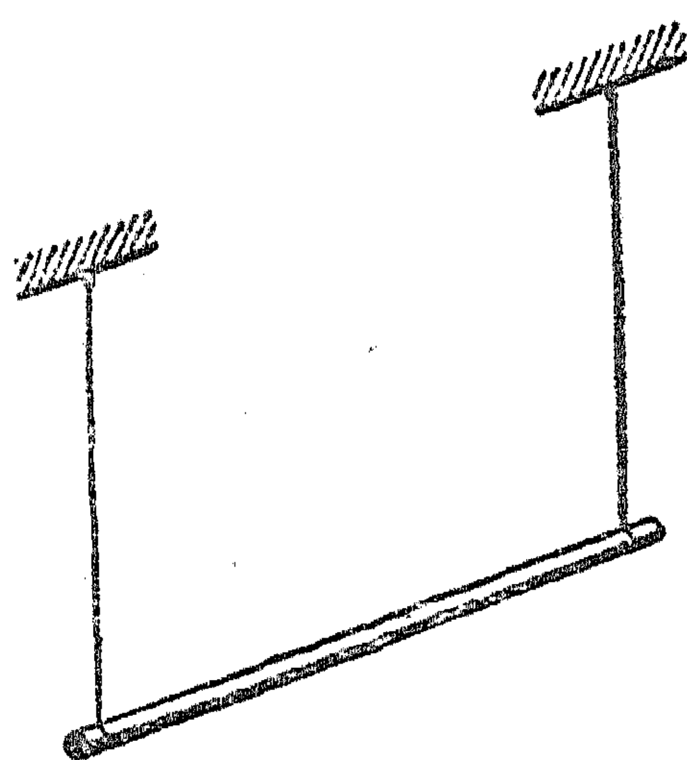


圖 13.

6. 如圖 14 所示，一杆水平地悬在剛度分別为 k_1 及 k_2 的兩彈簧上，并可繞通过 A 点的水平軸綫旋轉，杆上还裝有質量 m_1 及 m_2。

試决定微小鉛直振动的周期。

7. 船在靜水中的微小側振动(圖 1.)。

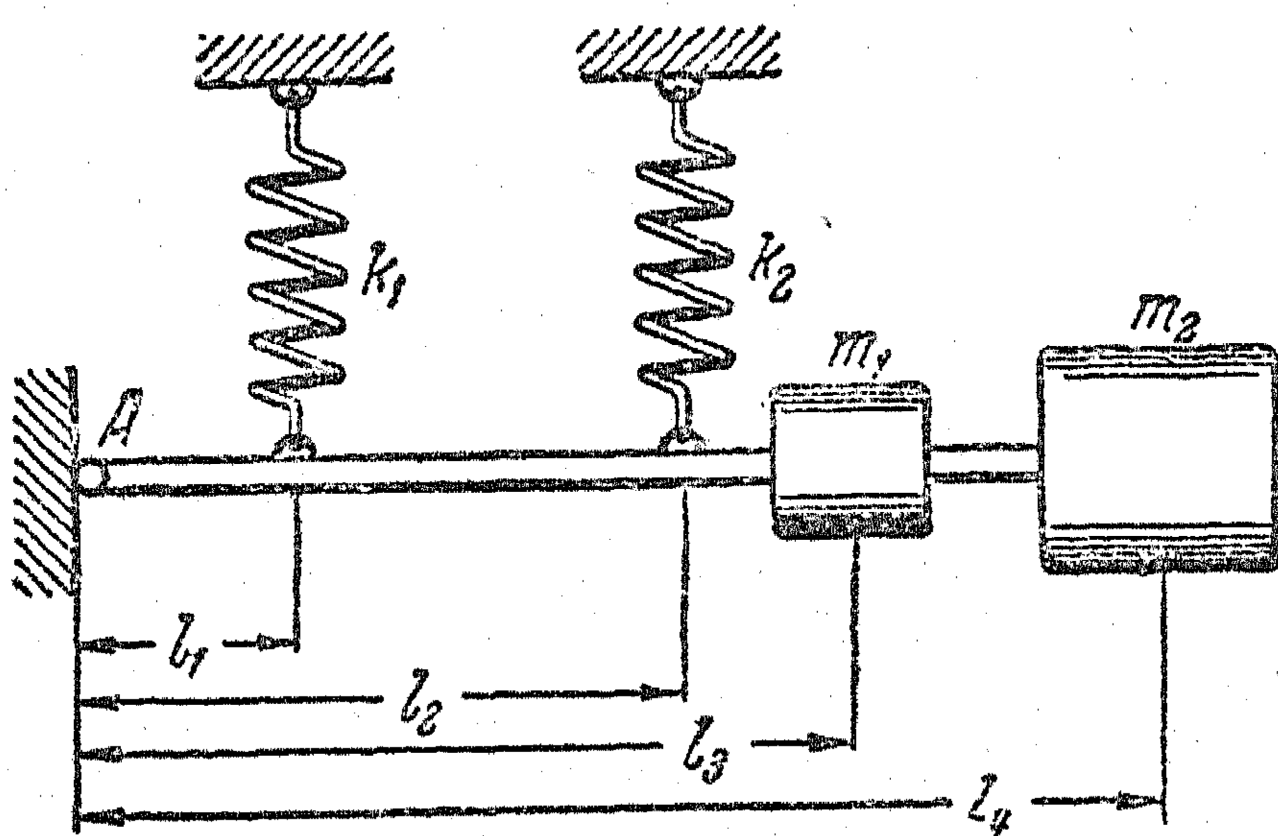


圖 14.

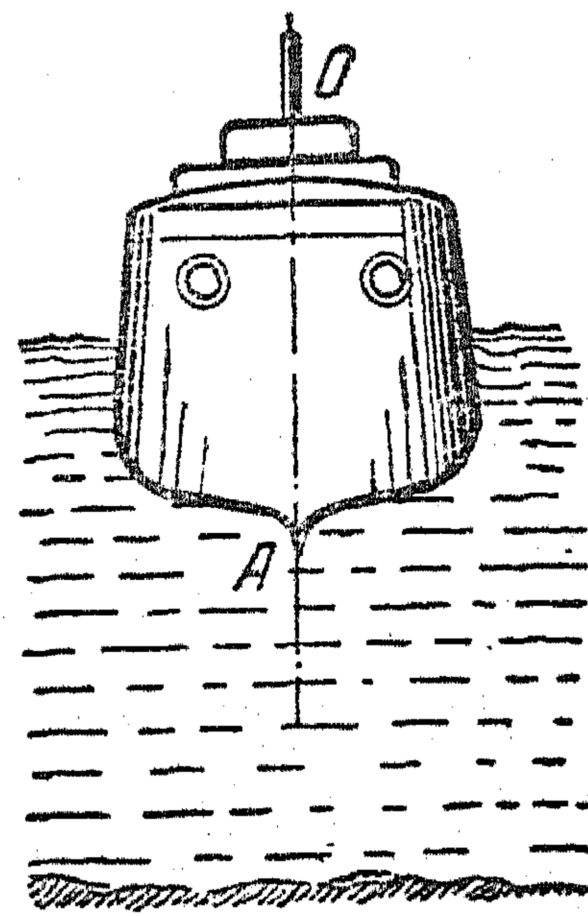


圖 15.

試研究水中航行物的穩定条件；如果船上的 OA 綫与圖中平面上的鉛直綫作成 φ 角，求复原力矩，

§ 3. 諧振动与能量振动的基本要点

固有頻率（在机械系統中为 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$，在电气系統中为 $1/\sqrt{LC}$）仅仅由系統中的物理参数来决定，振动的周期 T 与頻率

的关系由公式 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 来表出。

系統中的运动(振动)决定于起始条件。在一般情况下，从平衡位置的位移 $x(t)$ 与时間的依存关系如下:

$$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t. \tag{3.1}$$

如果在起始瞬間 $t=0$ 时，$x(0)=x_0$ 以及 $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$，那末，不难求得下列的运动:

$$x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t, \tag{3.2}$$

或

$$x(t)=D\cos(\omega t-\alpha), \tag{3.3}$$

其中

$$D=\sqrt{x_0^2+\frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}},\qquad \alpha=\operatorname{arctg}\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$

D 称为位移的振幅，α 是起始相位，振幅与相位都决定于起始条件，而頻率則仅仅由系統的構造决定。

位移 $x(t)$ 作諧振动，就速度 $\dot{x}(t)$ 及加速度 $\ddot{x}(t)$ 来說，也是諧振动。如果 $x=D\cos(\omega t-\alpha)$，那末，$\dot{x}=-\omega D\sin(\omega t-\alpha)$ 以及 $\ddot{x}=-\omega^2D\cos(\omega t-\alpha)$。速度的振动和位移的振动在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$；速度的振幅等于 ωD。加速度的振动与位移振动反相位，其振幅等于 ω^2D。記住这些公式是有益的。例如当振动頻率为 100 赫，$\omega\approx628$ 时，如果位移振幅～1毫米，那末，速度的振幅～628 毫米/秒＝0.628 米/秒，而加速度的振幅～628×628 毫米/秒²≈$40g$，其中 g 是重力加速度。对具有一定質量并正在振动的物体，不难根据其加速度来确定作用于該物体上的力。

当振动时，守恒系統中的能量保持恒定，但会由一种形式的能量变成另一种形式的能量。例如，在机械系統中——由动能变为位能，以及反过来。

系統的动能如下式，它随时間而变化:

$$E_{кин}=\frac{m\dot{x}^2}{2}=\frac{m\omega^2D^2}{2}\sin^2(\omega t-\alpha). \qquad (3.4)$$

系統的位能如下式:

$$E_{пот}=k\int_0^x xdx=\frac{kx^2}{2}=\frac{kD^2}{2}\cos^2(\omega t-\alpha). \qquad (3.5)$$

因为 $k=m\omega^2$,不难看出:

$$E_{кин}+E_{пот}=\frac{1}{2}kD^2=\frac{1}{2}m\omega^2D^2, \qquad (3.6)$$

因此,由运动方程式可推出能量的恒定。其实,如果用 $\dot{x}$ 乘方程式(2.1)并作变换,便得:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=0;$$

由此便得到:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=E_{кин}+E_{пот}=常数。 \qquad (3.7)$$

值得研究一下圖形(圖 16及 17),因为它們清楚地表明着不同

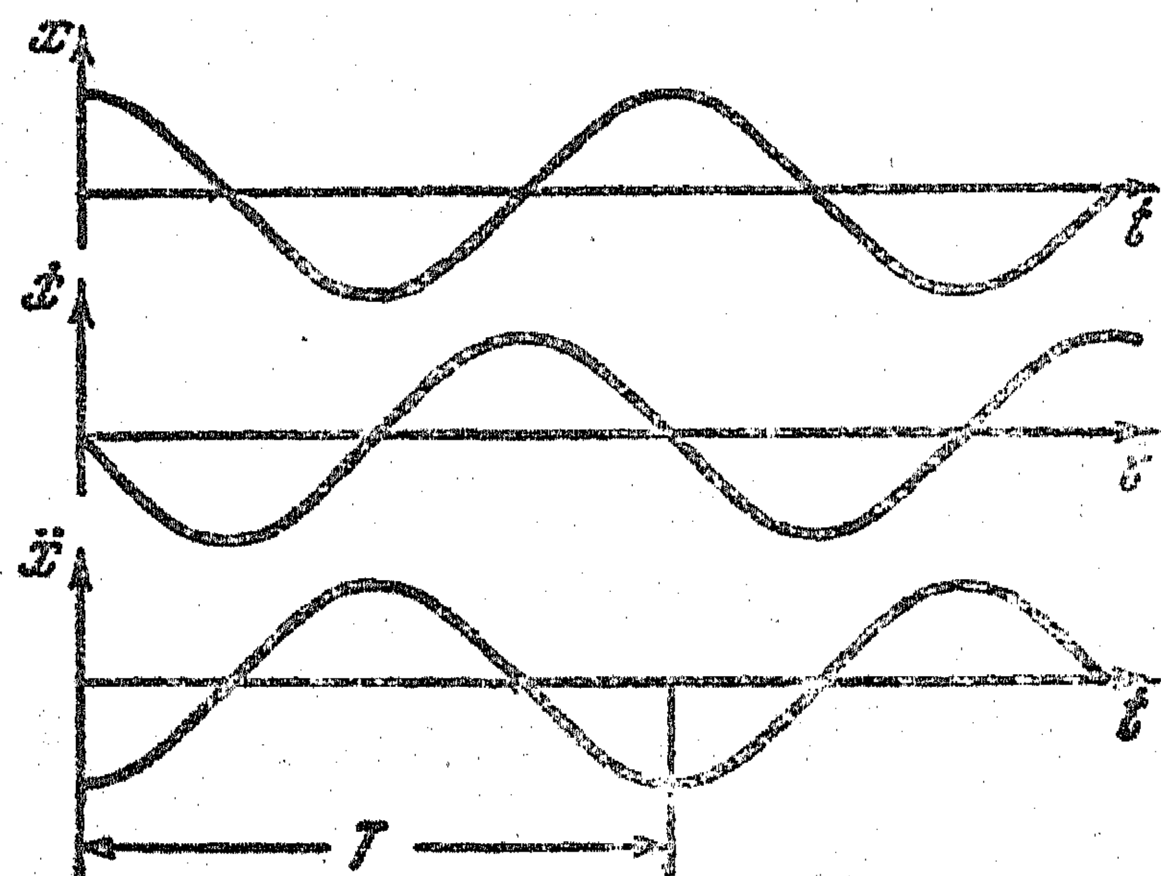


圖 16.

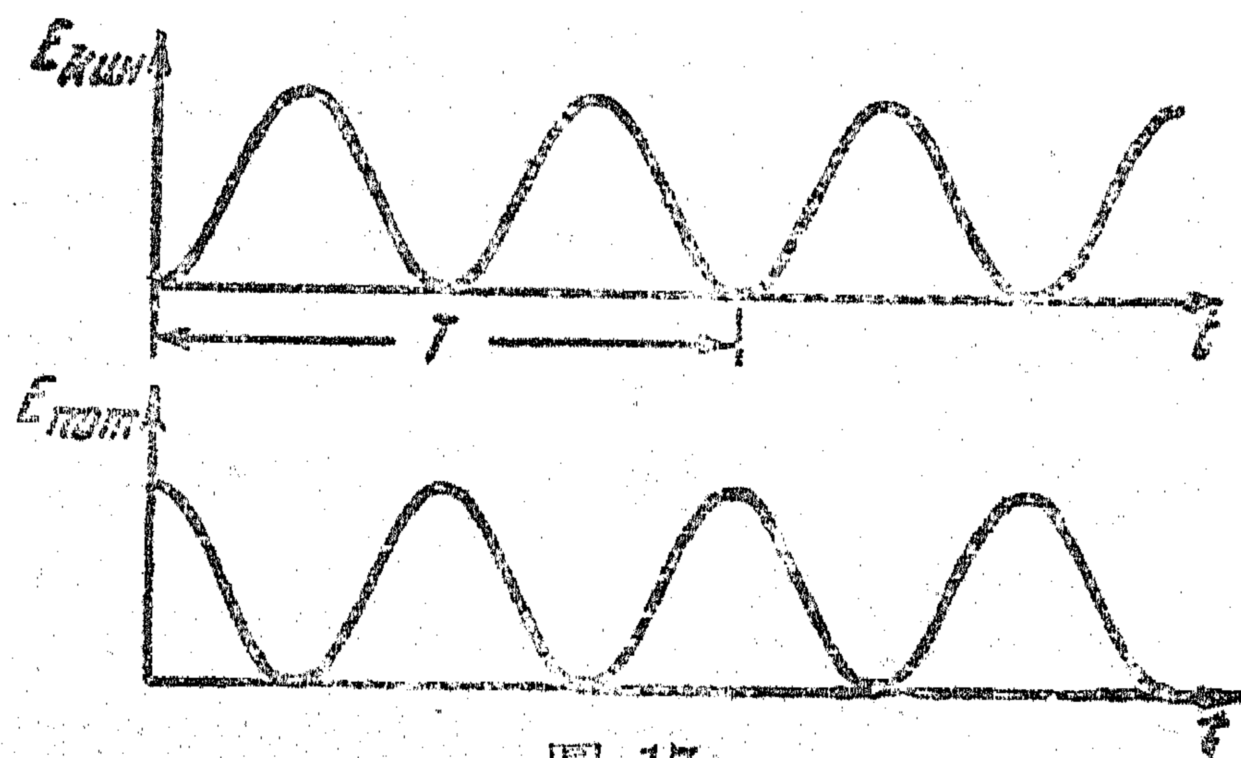


圖 17.

各量随时間的变化。

利用能量的恒定，也就是利用动能的最大值(就时間說)与位能的最大值相等来計算固有頻率，有时是很方便的。

讓我們来計算 § 2 第 5 題的固有頻率。

令杆的偏角 $\varphi=\varphi_0\cos\omega t$；那末，当

$\dot{\varphi}=0$，$\varphi=\varphi_0$ 时，全部能量都是位能，其大小为：

$$E_{\text{пот}}=\frac{k_1 l_1^2\varphi_0^2}{2}+\frac{k_2 l_2^2\varphi_0^2}{2}=E.$$

当 $\varphi=0$，$\dot{\varphi}=\omega\varphi_0$时，全部能量都是动能，其大小等于：

$$E_{\text{кин}}=\frac{m_1 l_3^2\varphi_0^2\omega^2}{2}+\frac{m_2 l_4^2\varphi_0^2\omega^2}{2}=E.$$

动能的最大值等于位能的最大值，于是，由这一等式推出：

$$\omega^2=\frac{k_1 l_1^2+k_2 l_2^2}{m_1 l_3^2+m_2 l_4^2}$$

用这种方法来計算，比建立运动方程式要簡單得多。在实际計算中常常用这种方法。

習題

1. 用上述方法求前节例題 3 的頻率。
2. 如横断面沿容器逐漸地变化，求連通器中的固有振动的頻率。

§ 4. 具一个自由度的非守恒系統中的固有振动

当机械系統在固有振动的情况下振动时，系統中的能量不断地減少。摩擦力所作的功，等于轉換成热的机械能。

在力学中，物体彼此間相对滑动、或者物体在液体或气体中运动时的摩擦力(在后一情况下，称为阻力)，由速度决定并作用于与速度相反的方向。18 圖所繪的系一般情况下摩擦力与速度間的依存关系圖；应該注意的是微分功 $f_{\text{тр}}\,dx=f_{\text{тр}}\dot{x}\,dt<0$(总是負值)。

即令在"最簡單"的情形——在具有干燥表面的固体摩擦的情

况下，摩擦力仍由速度决定(圖 19)。

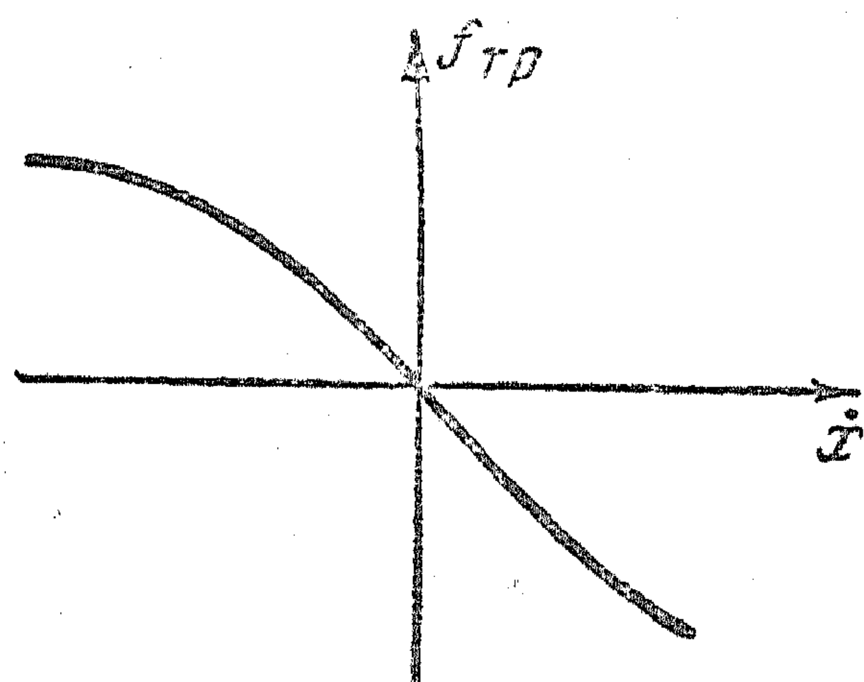


圖 18.

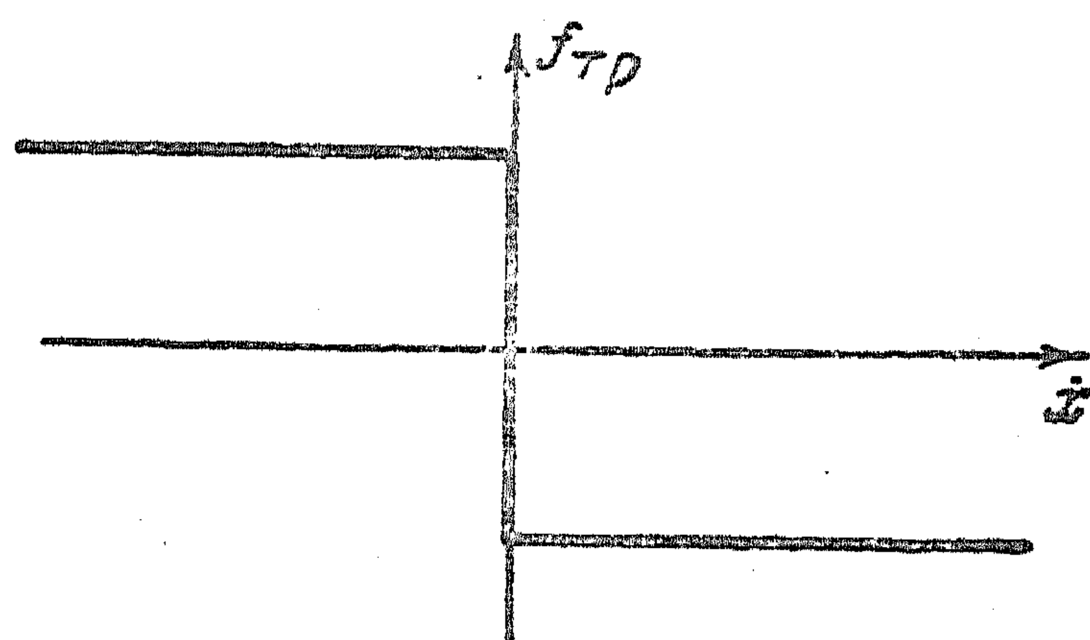


圖 19.

在这种情况下，当 $\dot{x}=0$ 时(“静摩擦力”)，摩擦力为不定値。

在具有干燥表面摩擦的复杂系統中，当 $\dot{x}=0$ 时，由于出現摩擦力的突变，使振动的理論分析遭遇到很大的困难。

在介質中运动着的物体所受到的摩擦力，或者更恰当些說，所受到的阻力，决定于物体的速度，决定于物体的形狀与大小，以及决定于介質的特性。当雷諾系数的値微小时，摩擦力可認为与速度的一次方成正比；随着速度的增加(随着雷諾系数的增加)，物体阻力的規律發生变化；随着速度进一步的增加，摩擦可認为与速度的平方成正比。在机械振动中，摩擦力几乎总可認为与速度的一次方成正比。此外，在彈性物体中还有“內”摩擦力。当形变很小时，“內”摩擦力可認为与形变的速度成正比。因而这一摩擦力的出現，仅仅使摩擦力的系数在大小上有某些改变，却并未改变其規律。当形变較大时，“彈性滯后現象”的影响便很显著，同时还会引起能量的損失。在有“彈性滯后現象”的情况下，固有振动的理論变得很复杂，并超出本書的范圍。

彈簧上的荷重(圖 4)的振动方程式——方程式(2.1)，当有与速度成綫性关系的摩擦力出現时，便具有下列形式：

$$m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=0, \tag{4.1}$$

其中 $h\dot{x}$ 为摩擦力，h 为摩擦系数，其因次为千克(重)秒/厘米，或

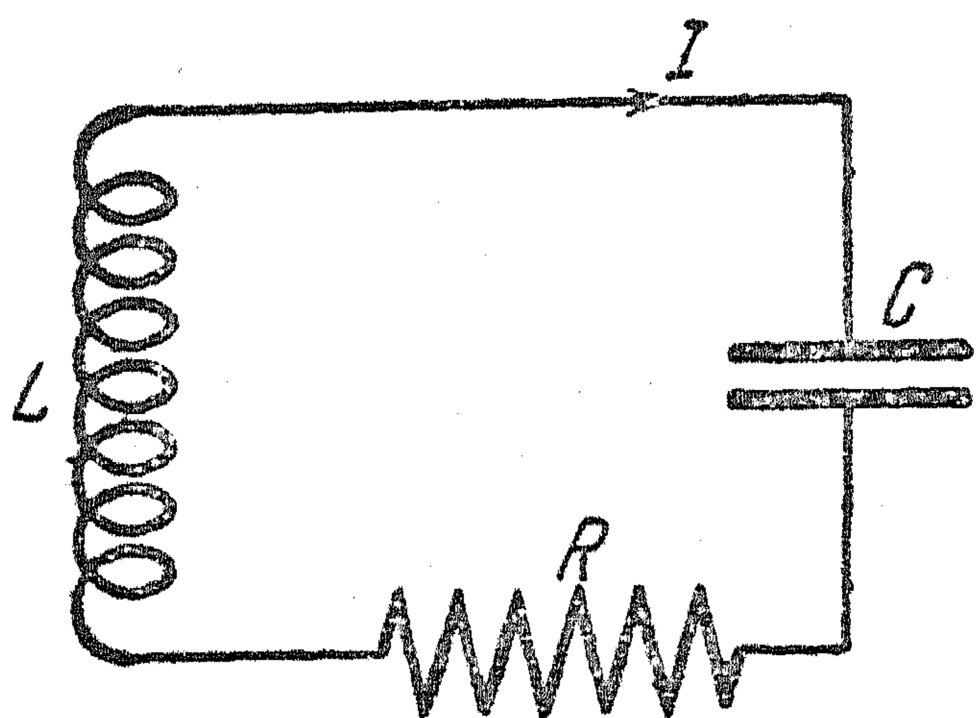


圖 20.

达·秒/厘米。在含有电感量 L 及电容量 C 及欧姆律电阻 R 的电迴路中(圖 20)，R 与力学中的摩擦系数相类似。

其实，如果不用电流 I，而用电容器上的电荷 q 作为变数，幷根据定义 $\dot{q}=I$，那末，迴路电压的方程式具有下列形式:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=0. \tag{4.2}$$

十分显然，从数学的观点說，方程式(4.1)与方程式(4.2)毫無区别，因而值得举出这兩种系統間的类似之处：如果位移 x 与电荷 q 类似，則質量 m 与自感量 L 类似，阻力系数 h 与欧姆律电阻 R 类似，剛度 k 与电容量的倒数 $\frac{1}{C}$ 类似。

为了分析振动过程，方程式(4.1)及(4.2)可用一种形式来表示，即:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2x=0, \tag{4.3}$$

我們把其中的 x 理解为位移或者理解为电荷。

而 $$\delta=\frac{h}{2m} \quad 或 \quad \frac{R}{2L}, \tag{4.4}$$

及 $$\omega^2=\frac{k}{m} \quad 或 \quad \frac{1}{LC}.$$

这就是說：系統中的固有振动的物理过程是由 ω 和 δ 这兩个量所确定的，而这兩个量与系統参数間的关系式为(4.4)式。[δ]的因次＝1/秒。

方程式(4.3)为阻尼振动的方程式，其通解具有下列形式:

$$x=De^{-\delta t}\cos(\omega_1 t-\alpha), \tag{4.5}$$

D和α——由起始条件决定的常数，而

$$\omega_1^2=\omega^2-\delta^2. \tag{4.5a}$$

显然，当 $\delta\to 0$ 时，(4.5) 式趋于前面已經得到的、关于守恒系統中固有振动的表达式。

現在回忆一下解方程式(4.3)的步驟。任何綫性微分方程式都有$Ae^{\lambda t}$形式的特解。將它代入(4.3)，幷用$Ae^{\lambda t}$除后，我們得到决定λ的方程式：

$$\lambda^2+2\delta\lambda+\omega^2=0.$$

这一方程式的解为

$$\lambda_{1,2}=-\delta\pm i\sqrt{\omega^2-\delta^2}=-\delta\pm i\omega_1,$$

其中 $i=\sqrt{-1}$。

因此，(4.3)的通解可以写成这样的形式：

$$x(t)=e^{-\delta t}(Ae^{i\omega_1 t}+Be^{-i\omega_1 t}), \tag{4.6}$$

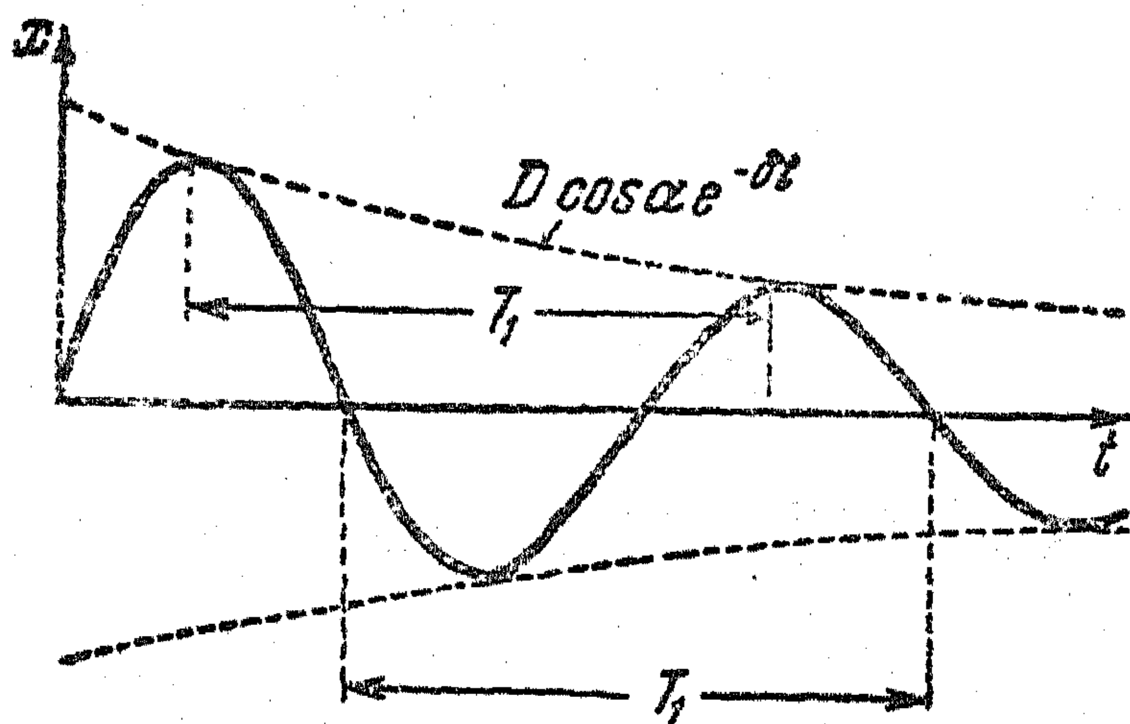


圖 21.

其中A及B为由起始条件决定的常数。借助于等式 $2A=De^{-i\alpha}$，$2B=De^{i\alpha}$，用新的常数D及α代替A及B后，我們就得到(4.5)式。

(4.5)式代表阻尼振动(圖21)，δ一量称为阻尼系数，它标明着固有振动延續的时間。

有时可采用另一量，即：

$$\tau_0=\frac{1}{\delta}=\frac{2m}{h}=\frac{2L}{R}, \tag{4.7}$$

这一量称为系統的“时間常数”。

由公式(4.5)可以看出，經过时間τ_0以后，由平衡位置的歧离，

其最大値將減小到 e 分之一$\left(約\frac{1}{3}\right)$①

通常把那些合于公式(4.5)的振动，称为"阻尼的正弦"振动，当阻尼不大时，我們可以同意这个命名，因为这种振动，在頗短的一段时間內，看起来就像是正弦曲綫似的。然而应該注意到这一名詞的不合邏輯处，并清晰的理解到，严格說来，(4.5)式絕不是什么正弦曲綫。我們也常提到：在阻尼振动中，振动的"振幅"减弱着，但是振幅——这一与正弦曲綫密切关联着的概念，对于正弦曲綫来說，却是常数。由于傳統的关系，我們以后仍采用这种說法。但要理解到它的不合邏輯处。

圖 21 所示的，关于方程式(4.5)的曲綫，全然不是周期的。然而談到 $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$ 一量时，則可称它为假定周期②。这个假定周期是相繼地兩次經过平衡位置进入同側所需的时間，或者在到达同側的兩个最大歧离之間所需的时間。

为了标明阻尼，常用的不是 δ（或者 τ_0），而是下面的無因次的量。

$$\vartheta=\delta T_1=2\pi\frac{\delta}{\omega_1}, \tag{4.8}$$

ϑ 称为阻尼的減縮。

不难看出，如果在某一瞬間 t，歧离(位移)的大小为 $x=Ne^{-\delta t}$，那末，經过时間 T_1 后它將是：

$$x_1=Ne^{-\delta(t+T_1)}; \qquad 由此得，\frac{x_1}{x}=e^{-\delta T_1};$$

上式可写成：

$$\delta T_1=\ln\left(\frac{x}{x_1}\right),\ 或根据(4.8)得,\ \vartheta=\ln\left(\frac{x}{x_1}\right). \tag{4.9}$$

① $e=2.71828\cdots\cdots$，为自然对数的底。

② 原文为 условный период——譯者。

表达式(4.9)可以当作是減縮的定义。

因为在任何瞬間 t, (4.9)式都是正确的，那末最好取它到达最大値的那一瞬間。所以減縮等于(在同一側的)两个相繼"振幅"之比的自然对数。这就是說，減縮标志着振动振幅的減小。不难看出，$\frac{1}{\vartheta}$一数等于使"振幅"減小到 e 分之一$\left(約\frac{1}{3}\right)$时的振动次数。

因此 δ(或者 τ_0)确定着阻尼的时間，即过程的持續时間。而 ϑ $\left(或\frac{1}{\vartheta}\right)$确定着在有阻尼情况下的振动次数，即确定着在过程进行时的振动次数。例如假如 $\tau_0=0.01$ 秒，这就表示：經过 0.03 秒后，过程本身減弱到$\frac{1}{e^3}\left(\approx\frac{1}{25}\right)$。假如 $\vartheta=0.01$，那末这就表示：經过 100 次振动后，"振幅"減小到$\frac{1}{2.7}\left(\approx\frac{1}{3}\right)$。

下面我們指出某些系統減縮平均値的范圍：

1.	声振动系統	$\sim10\%$
2.	电迴路	$\sim2—5\%$
3.	音叉	$\sim0.1\%$
4.	晶体片	$\sim10^{-2}—10^{-3}\%$.

由上面看出，音叉的振动減弱到$\frac{1}{3}$时，約完成了 1000 次的振动。

今后將闡明确定系統中減縮的各种方法，但也可以根据固有振动的記录，由实驗确定它。一般是在圖形上沿縱坐标軸列出"振幅"的自然对数，沿橫坐标軸按同样的标尺列出振动的次数。这时，直綫的斜角，更准确些說，直綫的斜率，給出了減縮的大小。

常常用这种方法来确定摩擦力的規律。如果与"振幅"的对数相对应的点不在直綫上，那末至少摩擦力不与速度成正比。

假定当 $t=0$ 时，振动系統的起始数値为：$x(0)=x_0$ 及 $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$。將这些値代入(4.5)以及 $x(t)$ 的导函数时，我們得到：

$$D\cos\alpha=x_0,\qquad -\delta x_0+\omega_1 D\sin\alpha=\dot{x}_0,$$

由这里得

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{x_0\delta+\dot{x}_0}{\omega_1 x_0},$$

$$D^2=x_0^2+\frac{(x_0\delta+\dot{x}_0)^2}{\omega_1^2},$$

代入(4.5)后，我們得到振动的一般表达式:

$$x(t)=\sqrt{x_0^2+\frac{(x_0\delta+\dot{x}_0)^2}{\omega_1^2}}\,e^{-\delta t}\cos\left[\sqrt{\omega^2-\delta^2}\cdot t+\operatorname{arctg}\frac{x_0\delta+\dot{x}_0}{\omega_1 x_0}\right].\tag{4.10}$$

如果在系統中不断地增加摩擦，即不断的增加 δ，那末显然当 $\delta=\omega$ 时(及进一步当 $\delta>\omega$ 时)，(4.10)这种形式作为 $x(t)$的表达式，就全不适用了。最好把 $x(t)$簡單地写成如公式(4.6)那样的时間的指数函数。$\delta=\omega$一値称为阻尼系数的临界値。由(4.5 a)可以看出，在这种情形下，ω_1 变成零，因而假定周期与减縮 ϑ(4.8)都变成無穷大。当阻尼 δ 大于临界値时，ω_1 及 ϑ 兩値都是虛数。在这种情况下，运动已經具有非振动的特性。离开了平衡位置的系統，以逐漸并总是减小的速度趋向于平衡位置；或者仅仅通过平衡位置一次后又漸漸的回到平衡位置来。这种运动，我們称为有限运动。在下一节里，我們將比較詳細的研究它。因此，系統中的振动运动(4.10)和有限运动間的边界是由阻尼系数的临界値决定的。

§5. 用“相平面”研究具一个自由度的系統中的振动过程

为了分析在具有一个自由度的系統中的各种运动（固有振动)，常常利用“相平面”。“相空間”这一概念，在力学及統計物理中引用着，不过在目前的情况下，这一空間退縮为平面。

用相平面来分析綫性振动系統中的运动，其优点不过是比用

前面講过的普通方法要清楚些；可是对于非綫性系統來說，正如A. A 安德罗諾夫及維提所指出的，它却是一个極有力的研究工具。因此，讓我們用綫性系統中的固有振动的例子，來詳細的介紹这种方法。

系統的运动狀态（由二阶微分方程式所表示的）唯一地确定于兩个变数——坐标与速度。其实，給定这兩量以任一种任意起始值后，都唯一地决定了今后的全部过程，因为对于已給定的起始值①，微分方程式的解是唯一的。

設想一个笛卡尔平面 (x, y)；沿横坐标列出質量运动的坐标 x，而沿縱坐标列出对应于这一坐标的速度 $\dot{x}=y$。具有坐标 $x(t)$，$y(t)$的点，称为描迹点。由描述运动的微分方程式，譬如(4.3)式，可以求得直接联系 x 及 y 的方程式，它便是相平面上积分曲綫的方程式，积分曲綫是这种曲綫，描述过程的点随时沿着它运动，积分曲綫有时又称为相軌綫。

于是，方程式(4.3)所代表的綫性振动系統，便可以写成兩个一阶微分方程式：

$$\frac{dx}{dt}=y, \tag{5.1}$$

$$\frac{dy}{dt}=-(2\delta y+\omega^2 x).$$

含有兩个方程式的方程組(5.1)与方程式(4.3)完全等效。由含有兩个微分方程的方程組很容易变換成一个不含时間的方程式。用(5.1)的第一式除其第二式，便得到在相平面上积分曲綫的微分方程式：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\delta y+\omega^2 x}{y}. \tag{5.2}$$

① 当然，是假定方程式中的函数，在該点附近，滿足一定的条件（柯西-李普希茲条件）。

这一方程式的解 $y=f(x, C)$，提供了代表該系統中各种过程的积分曲綫族。

在一般的情形下，对于与(5.1)类似的、任一具有一个自由度的系統的兩个方程式，可以写为：

$$\frac{dx}{dt}=y=Q(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d^2 x}{dt^2}=P(x, y),$$

其中 P 及 Q 都是 x 及 y 的已知函数。因此，在相平面上曲綫的方程式將是：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \qquad (5.3)$$

如果函数$\frac{P}{Q}$在平面(x, y)的一定区域內，是有界和單値的，那末，根据柯西理論，在給定 x 及 y 的情况下，这个方程式只有一个唯一的解。这表示：通过一个定点，有一根并只有一根积分曲綫，于是积分曲綫便处处都不相交。在不能滿足这些条件的点，积分曲綫便会彼此相交。这样的点，在研究系統的运动时，是十分重要的，我們称之为奇点。

平衡狀态与速度及加速度等于零相对应，即系統的平衡狀态对应于这样的点(x_0, y_0)，其中 $\dot{y}=0, \dot{x}=0$，或者

$$P(x_0, y_0)=0 \text{ 及 } Q(x_0, y_0)=0.$$

十分显然，根据(5.3)在点(x_0, y_0)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}. \qquad (5.4)$$

在这些点，方程式(5.3)中的函数$\frac{P}{Q}$是不定値，这就是說，这些点是微分方程式的奇点。

因此，系統的平衡狀态与相軌綫的微分方程式的奇点相对应。

試研究系統(5.2)的平衡狀态。它对应于$x_0=0, y_0=0$。其实，

选擇坐标原点的結果，可使 $x=0$；而在平衡狀态时，速度应該等于零，即 $y=0$。因此在这种点，方程式(5.2)变成了等式(5.4)。$x_0=0$ 及 $y_0=0$ 的点是奇点，通过这一点可能有几根积分曲綫，也就是，在与平衡狀态相对应的点，积分曲綫会彼此相交。由(5.4)可直接看出，在与平衡狀态相对应的奇点上，其积分曲綫的切綫方向是不定的，也就是說，积分曲綫一般可以沿着各种不同的方向"通过"奇点。

1. 諧振动的"相圖"①

(綫性守恒振动系統在相平面上的积分曲綫族)

当 $\delta=0$ 时，积分曲綫的方程式(5.2)为：

$$\frac{dy}{dx}=-\omega^2\frac{x}{y}.$$

不难求出上式的积分，其实上式就是 $ydy+$ $+\omega^2xdx=0$。因此，其积分曲綫族的方程式为：

$$y^2+\omega^2x^2=\text{常数}=C.$$

上式系以坐标原点——奇点——为公共中心的椭圆族(圖 22)。例如：如果 $x(0)=0$, $y(0)=v$, 那末，

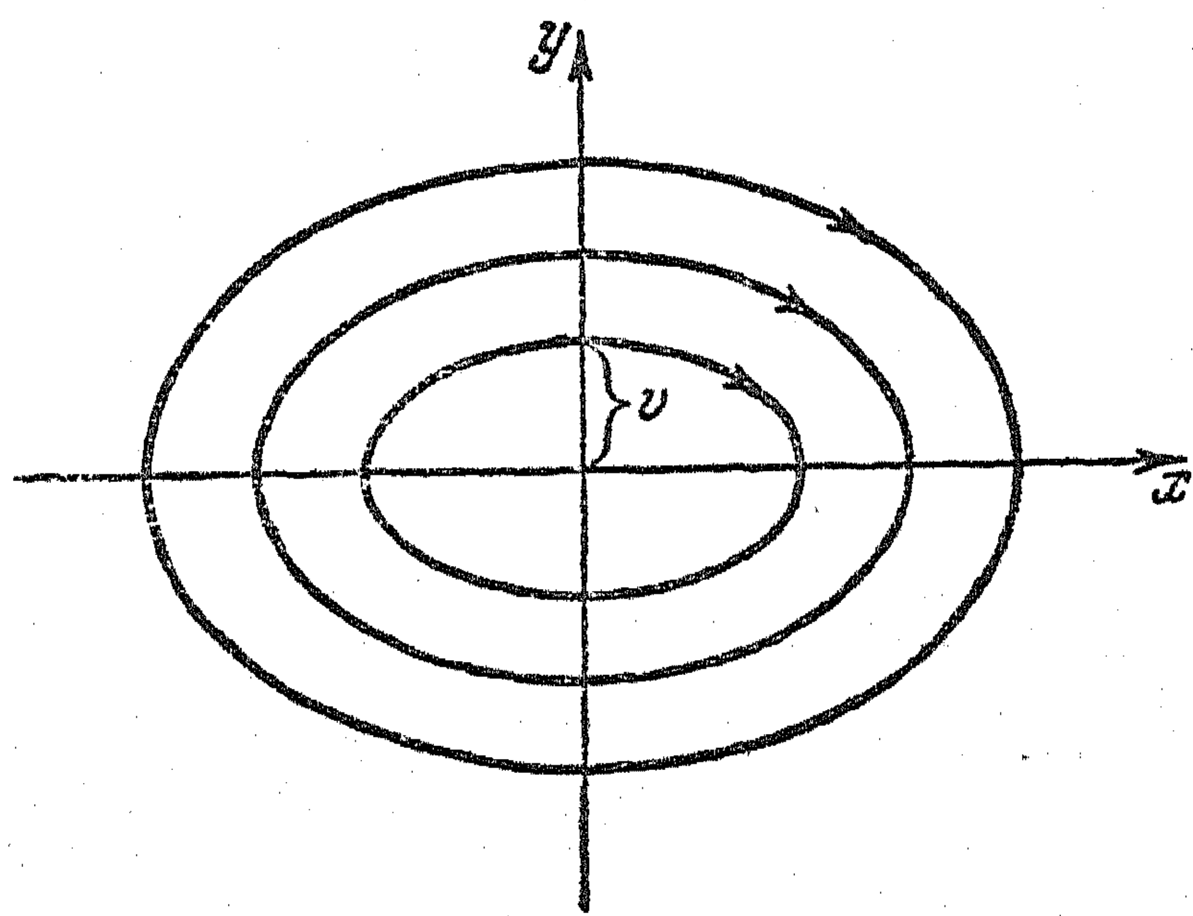


圖 22.

与这种起始条件相对应的椭圆方程式为：

$$\frac{y^2}{v^2}+\frac{\omega^2}{v^2}\cdot x^2=1.$$

給常数 C 以各种不同的值，我們便得到被一个套着一个的这种椭圆所复盖的相平面。描述过程的点以速度 W 沿着每个椭圆运

① 原文为 фазовый портрет——譯注。

动着:

$$|W|=\sqrt{y^2+\dot{y}^2}=\sqrt{y^2+\omega^4x^2},$$

W 是描迹点沿相平面运动的速度;注意不要把它和实际的速度,即描迹点的縱坐标弄混淆了。

描迹点圍繞橢圓一周所需的时間等于振动的周期$\frac{2\pi}{\omega}$,所有的橢圓的周期都相同。

平衡狀态發生在 $x_0=0, y_0=0$ 时,对应于它的奇点,仍旧是一根完整的积分曲綫——一个"退縮"为点的橢圓。这种奇点称为中心。

讓我們指出描迹点沿着积分曲綫运动的某些显而易見的情况,这对分析曲綫的圖形是有帮助的。在上一半平面中(即当 $y>0$ 时),描迹点总是向右,向 x 增加的一边运动,也就是沿相軌綫的运动速度在 x 軸上的射影总是正的。相反,在下一半平面中($y<0$),描迹点只向左运动。积分曲綫总是与横坐标軸($y=0$)成正交,这交点不会是拐点。

2. 阻尼振动的"相圖"

在这种情况下,积分曲綫的方程式具有下列形式:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2\delta y+\omega^2x}{y}. \tag{5.2}$$

上式可以直接求解。然而,我們却不去解方程式,而宁願用其他的方法来确定积分曲綫的路徑,尽管这样得出的結果只是定性的,但当需要解的不是(5.2)式,而是(5.3)式那样的非綫性方程式时,这种方法显得特别有用。因为根本沒有解非綫性方程式的一般方法,而"相圖"对于理解在这种情况下系統的过程,却很有用处。

为了这一目的,可利用等傾綫的方法。这个方法是在相平面上繪一些仅仅以同一定角与积分曲綫相交的綫。研究系統的等傾綫时,便不难"猜出"积分曲綫的路徑是怎样的。其次,如果需要的

話，应該研究积分曲綫与相平面上一定的已給曲綫如何相交。

由方程式(5.2)不难求得等傾綫的方程式。假定：

$$\frac{dy}{dx}=a,$$

a 为給定常数。那末，若將 a 代換(5.2)的 $\frac{dy}{dx}$，我們便得到等傾綫的方程式：

$$y=-\frac{\omega^2}{a+2\delta}x. \tag{5.5}$$

当 a 为各种不同的値时，上式为一通过坐标原点的直綫束。

还要考察一下，在这个等傾綫族中有沒有积分曲綫，也就是找一找 a 的这种値，这时 $y=ax$ 旣是积分曲綫又是等傾綫。

將 $y=ax$ 代入(5.5)，我們得到：

$$a=-\frac{\omega^2}{a+2\delta}, \tag{5.6}$$

或

$$a=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega^2}.$$

在振动的情况下，即当 $\omega>\delta$ 时，沒有这种等傾綫(或者这种积分曲綫)。在有限运动的情况下(§4)，即当 $\omega<\delta$ 时，有兩个通过原点的直綫型的积分曲綫。

給 a 以各种不同的値，并繪出所研究系統在振动情况下($\omega>\delta$)的等傾綫(圖23)：

1) $a=0,\quad y=-\frac{\omega^2}{2\delta}x;$　3) $a=1,\quad y=-\frac{\omega^2}{1+2\delta}x;$

2) $a=\infty,\quad y=0;$　4) $a=-1,\quad y=\frac{\omega^2}{1-2\delta}x.$

当 $x=0$，即在縱坐标軸上，$\left(\frac{dy}{dx}\right)=-2\delta$。

給出足够数目的等傾綫后，便不难导出积分曲綫。十分显然，在这种情况下，它將是一根盤向坐标原点的螺綫。由任何起始位置的描迹点，总会逐漸地趋近于坐标原点，系統总会趋于平衡位

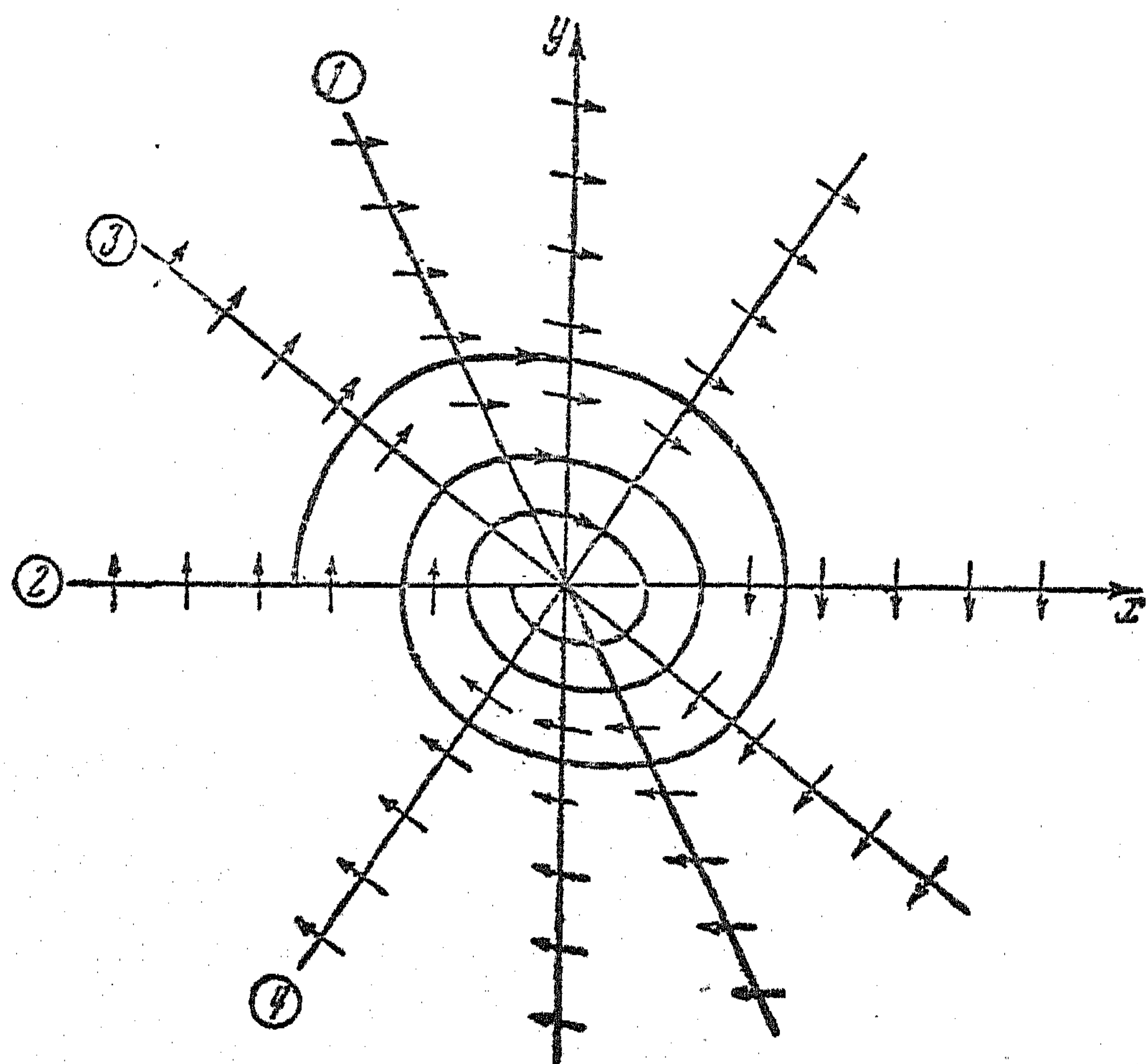


圖 23.

置。如果在相平面上繪一螺綫，那末，所有其余的螺綫，例如由 mn 綫段中开始的，將彼此不相交地"进入"原点，同时在螺綫相鄰的兩卷的間隙中，总存在着某个同样的螺綫（圖 24）。

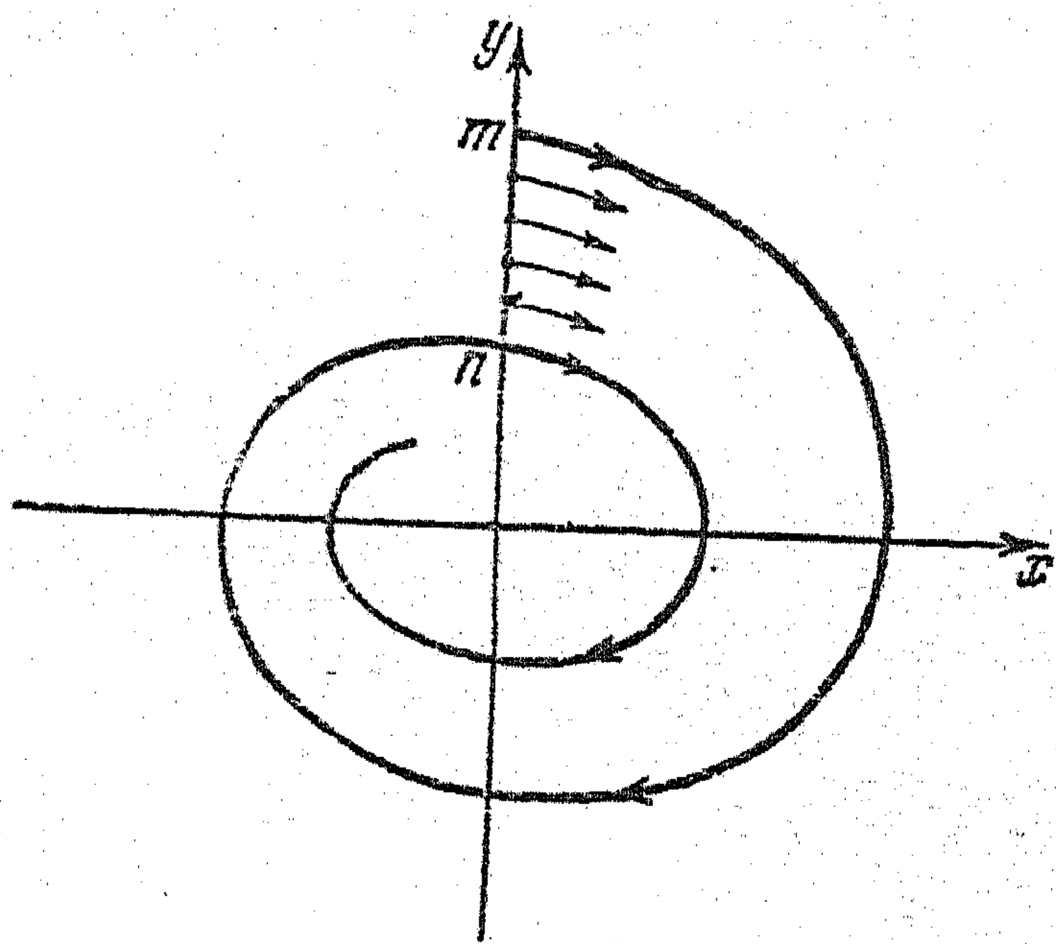


圖 24.

在这种情形下，与平衡位置相对应的奇点称为稳定焦点。所有的积分曲綫都不相交，但呈螺旋形狀彼此盤繞着，并逐漸趋近于坐标原点（奇点）。

把阻尼振动相曲綫圖形（圖 23）与 x 随时間振动的圖形（圖 21）比較一下是有益的。

如果 $\delta>\omega$，那末，运动將是非振动的或者有限的（称它为非周期"的不完全正确）①。在这

① 因为阻尼振动运动已經是非周期的。

种情况下，“相圖”所發生的原則性的变化是：出現下列兩根直綫型的积分曲綫——等傾綫，其角系数由方程式(5.6)决定

$$y=-(\delta+\alpha)x,\qquad y=(\alpha-\delta)x,$$

其中

$$\alpha=\sqrt{\delta^2-\omega^2}.$$

所有位于这兩根直綫間的积分曲綫，都应該不超出这兩綫間的夾角，通过坐标原点，彼此不相交(圖 25)。不难确定，那些第一象限的曲綫，都向下“墜落”，偏右并与橫軸正交，当达到位于直綫 $y=-\frac{\omega^2}{2\delta}x$ 上的最低点时便折向坐标原点，并进入坐标原点。

注意到积分曲綫应該处处都不相交时，便不难在相平面上定性地繪出整个的积分曲綫。

(由严密的理論得知，积分曲綫在接近坐标原点时，与直綫 $y=(\alpha-\delta)x$ 以及 $y=-(\alpha+\delta)x$ 这样的相切：积分曲綫束有一边与兩直綫之一相切，但經过原点后，同一束仍以原来一边与另一直綫相切)。

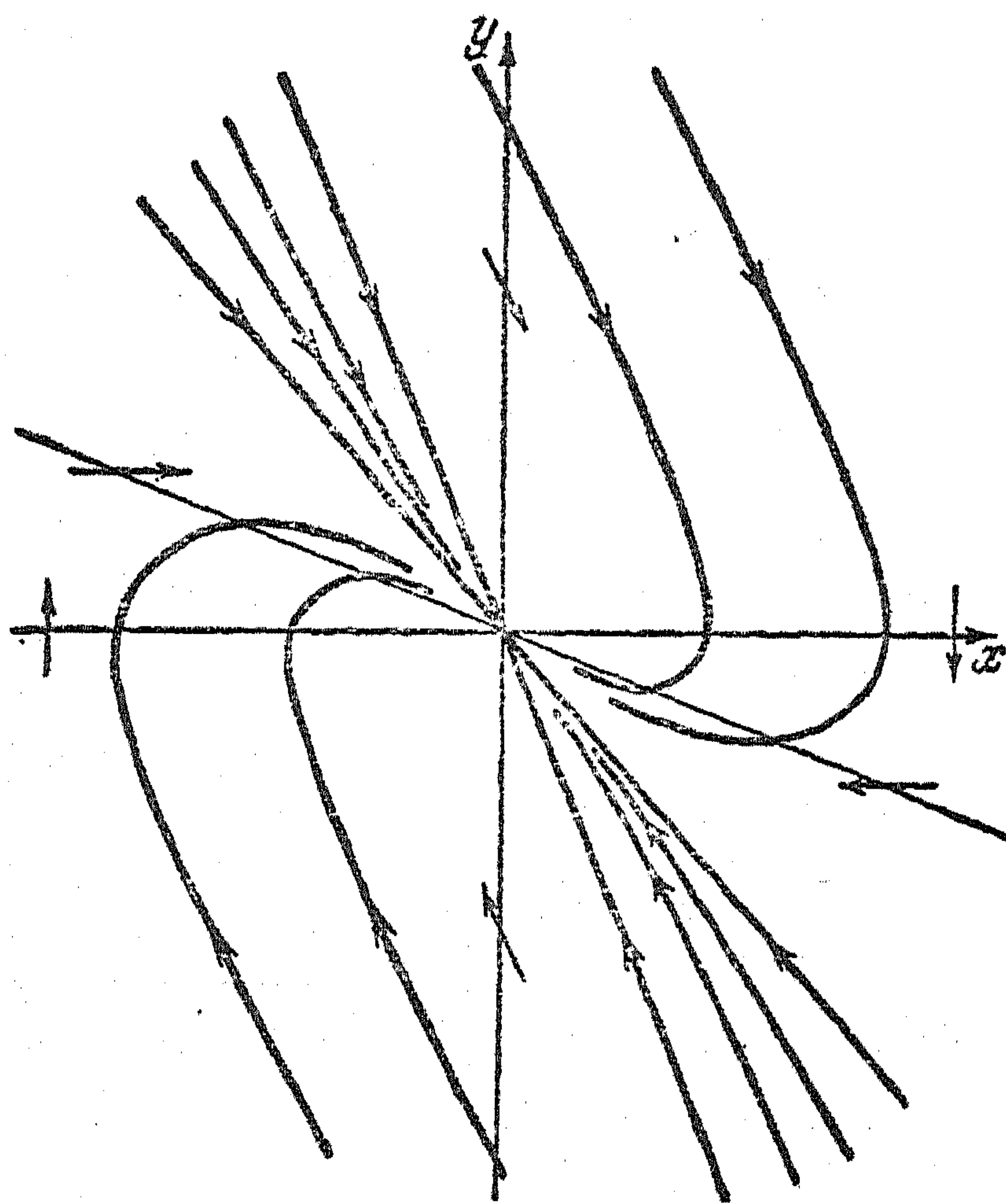


圖 25.

在这种情形下，在坐标原点的奇点，称为稳定結点。

値得指出的是等傾綫——积分曲綫——和坐标軸把整个相平面分成六个不同的区域(圖 26)，由这些区域內起始的运动，各有其特殊的形式。如果在起始瞬間，描迹点位于标明在圖 26 上的、每种不同的相平面区域时，則 x 随时間的变化具有不同的形式。

由区域 1 及 2 中开始的运动所对应的起始条件是：質量由平

衡位置歧离，幷具有远离平衡位置的冲击，运动的形式如圖 27,a 所繪。如果描迹点由区域 3 及 4 中开始运动，那末，其起始条件是：質量由平衡位置歧离，

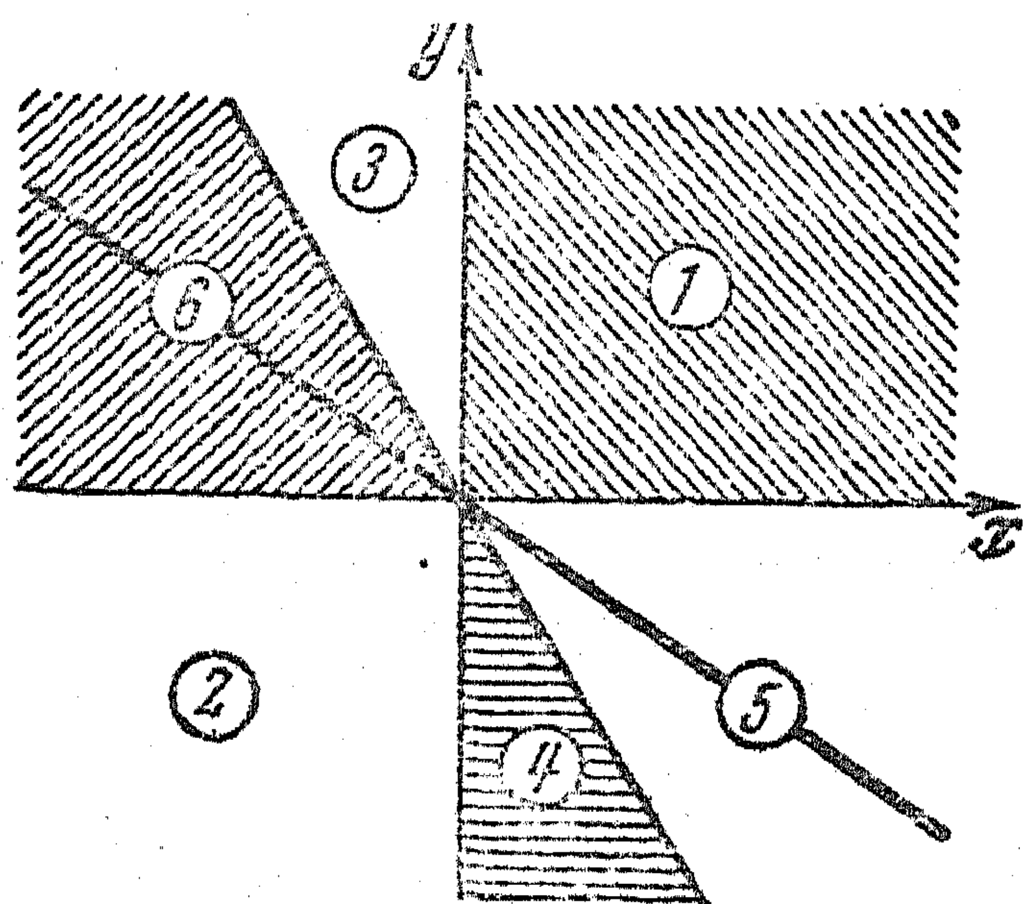


圖 26.

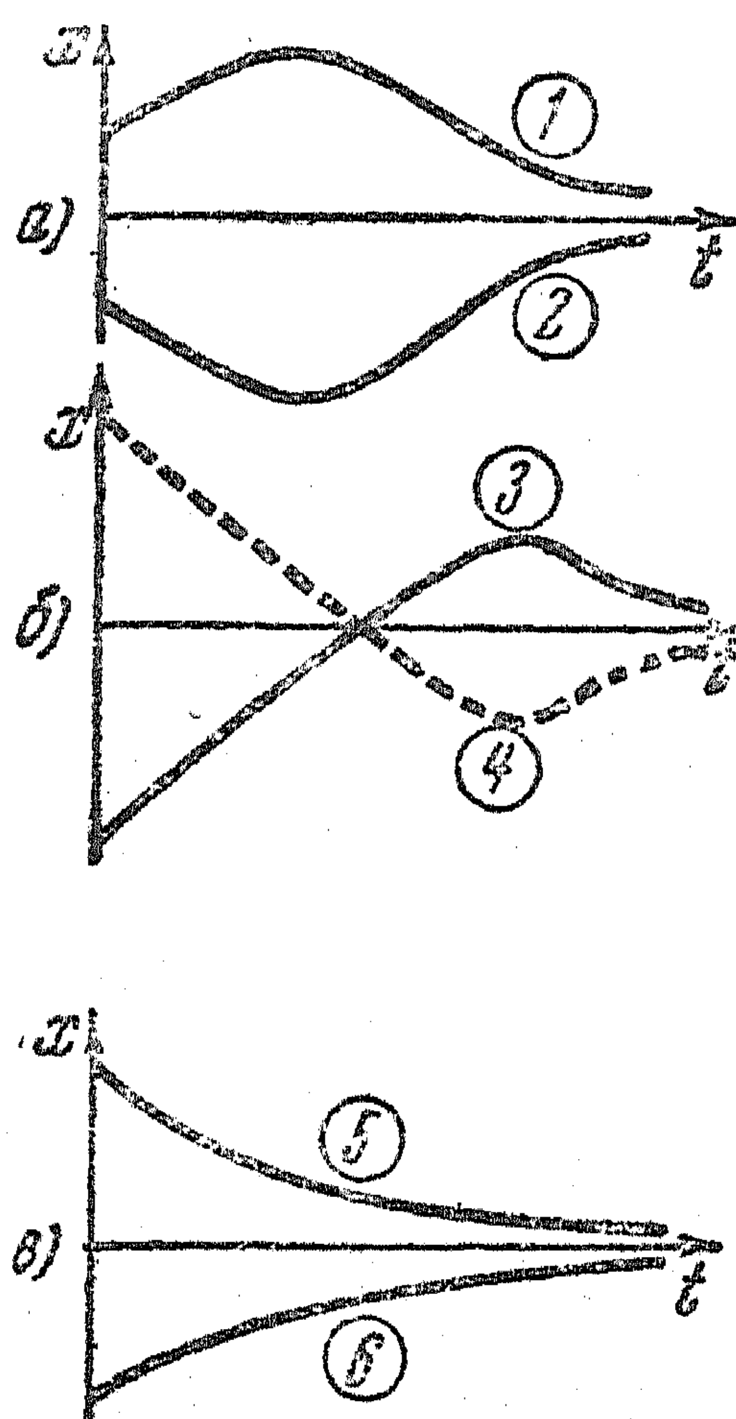


圖 27.

幷具有很大的指向平衡位置的冲击，这冲击会使質量穿过平衡位置一次，其运动如圖 27,$б$ 所示。由区域 5 及 6 中的运动，对应于这些起始条件：質量由平衡位置歧离幷有不大的指向平衡位置的冲击，其运动如圖 27,$в$ 所示。

应当指出，虽然在 $\delta>\omega$ 以及 $\delta<\omega$ 的情形下，相平面上的圖形，彼此間有着原則性的区别，但当 $\delta\approx\omega$ 时，在相平面上的曲綫，实际上，彼此十分类似，不依存于 $\delta>\omega$ 或 $\omega>\delta$。

当 δ 变化时，积分曲綫在相平面上的圖形（"相圖"）作如下的变化：在坐标原点的焦点变为結点。这也就是：随着 δ 的增大（当 ω 为常数时），螺綫不断地增加自己的螺距，同时迅速地（不弯曲地）趋向原点。当 $\delta=\omega$ 时，出現一条直綫（积分曲綫）$y=-\delta x$，这时"螺綫"已經不复与这綫相交，进一步增加 δ，由一根直綫（积分曲綫）变为兩根，在这兩根綫之間有一夾角。

研究当系統参数变化时相圖所作的变动，对于理解系統中的

物理过程很有益处。只要看看当参数为給定値时的"相圖"，便可以对系統在任何起始値的一切运动作出描述，其次，当你注意到圖形随参数的改变而变动时，便可以在参数为各种不同値时对所給物理系統会發生的一切运动作出描述。例如，知道了奇点在相平面上的分布和特性，便有可能对所給系統中的过程作出一些結論，固然，这种結論純粹是定性的。

然而，有时也可以根据相圖作出量的計算，这对于分析非綫性系統中的振动特別有价値。

在具有阻尼的綫性振动系統中，仅仅有 δ 及 ω 兩个参数。根据这兩参数間的关系，可以簡單明了地描繪出在这种系統中过程的特性(圖 28)。

在圖 28 上，我們把 δ 当作变数，而把 ω 当作常数。沿軸列出 δ，关于 δ 値的各个区域都与一定形式的相圖相对应。

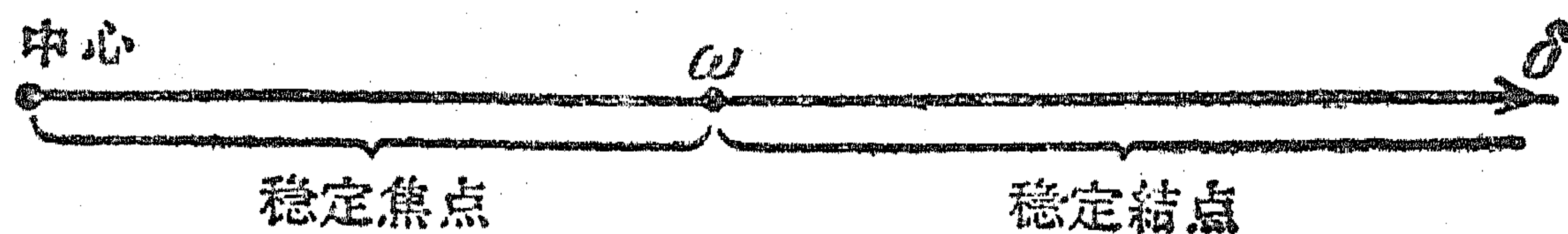


圖 28.

§6. 具"負"阻尼的系統的固有振动

摩擦力或者电迴路电阻上的电压降，由于它們与能量变換成热相联系，与系統儲藏的机械能或电磁能的减少相联系，因而起着特別的作用。

其实，由机械振动的基本方程式

$$m\ddot{x}+kx=-h\dot{x}$$

用 $\dot{x}$ 和它相乘，并加变換后，便得:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\right)=-h\dot{x}^2, \qquad (6.1)$$

或者，由电迴路振动的基本方程式可得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L\dot{q}^2}{2}+\frac{q^2}{2C}\right)=-R\dot{q}^2.$$

因为一切系統都有摩擦力（或者电阻），因而，振动总会衰减下去。

然而也不尽如此。也有这样的实际系統，其中發生着与速度 $\dot{x}$ 成正比但与摩擦力符号相反的力，或者与 $\dot{q}$ 成正比但与电阻电压降符号相反的电压。通常称这种系統拥有"負摩擦"或"負电阻"。"負摩擦"或者"負电阻"只是一种命名，不应該从它們里边来寻求特别的物理意义。而在物理上它的意义是：在系統中有提供上述类型的力（或者电压）的能源。至于它是怎样产生的呢，那最好是由一个具体的例子来看，再生接收机便可作为这样的例子。

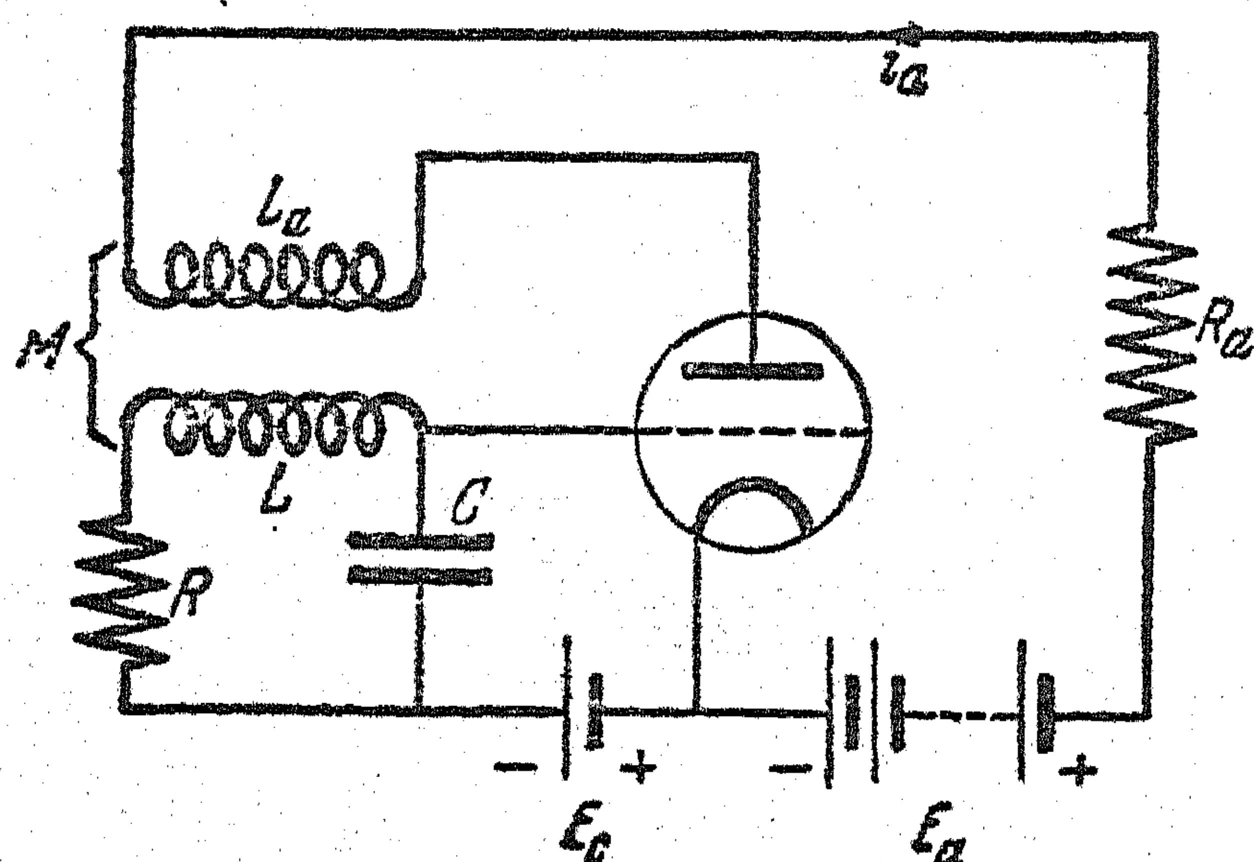


圖 29.

再生接收机的綫路如圖 29 所示。电子管的柵極电路与振动迴路（L, C, R）相連，在板極电路中，連有与振动迴路的綫圈相耦合的电感量 L_a（"反饋綫圈"）。

在分析这一綫路以前，讓我們講一点电子管的特性：电子管的板流 i_a 是其柵压和板压的函数，而柵压 v_c 是陰極与柵極間的电位差，板压 v_a 是陰極与板極之間的电位差。电流 i_a 一般是 v_c+Dv_a 的函数，其中 D 为一常数，称为电子管的滲透率。如果 v_c 有所改变，那末，会使电流 i_a 發生变化。因为在板極电路中除了电子管以外还有負载，所以 v_a 依存于 i_a，然而 D 这一量十分小 $\left(\frac{1}{100}\text{或}\frac{1}{10}\right)$，因此 v_a 的变化对 i_a 的影响一般很小。在一次近似中，可以認为 i_a

只是柵压的函数。i_a 与 v_a 的依存关系（当 v_a 为常数时），具有如圖 30 所示的形式，重要的是这一依存关系是非綫性的。

这样选擇电源电压 E_a 及 E_c，使得在平衡狀态附近振动时，柵極电位对于陰極来說是負的。这总是可以做到的。在这种情形下，柵極电流將極其小，于是便可以認为在柵極—陰極迴路中的电流等于零。

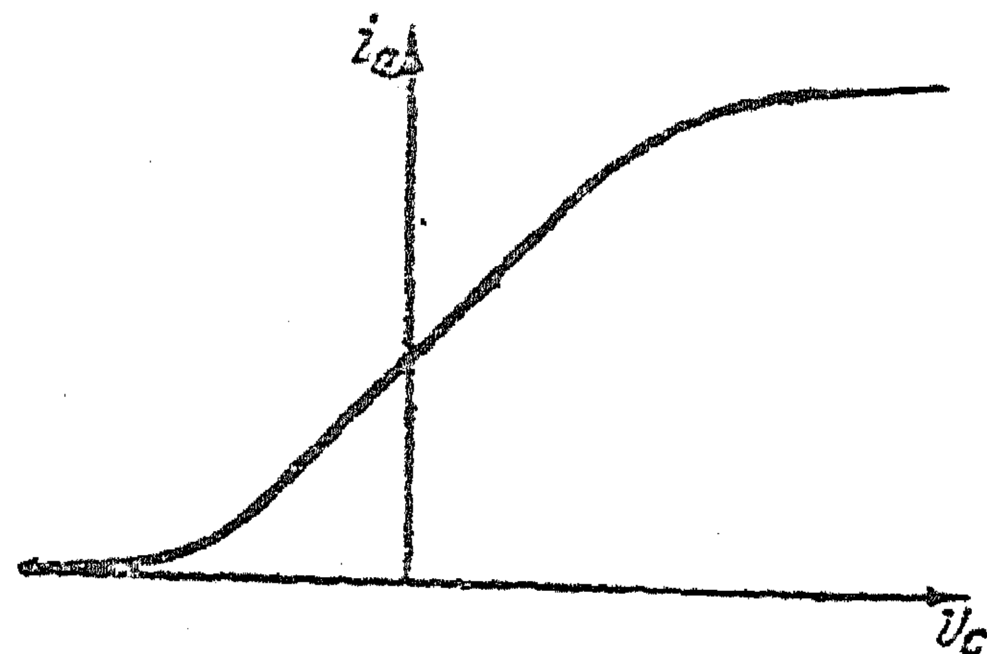


圖 30.

用 q 代表电容器上的电荷，那末振动迴路的方程式便可写为：

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=\pm M\frac{di_a}{dt}, \qquad (6.2)$$

其中，綫圈間电感耦合系数的符号，决定于綫圈繞綫的相对方向。很明显，变更任一綫圈的接头（不改变其位置），都会使 M 的符号發生变化。因此，我們就在 M 前面加一个 ± 号。

其次，这样选擇 E_a 及 E_c，使得"工作点"大約位于特性曲綫的中点。工作点的 $(i_{a0})(v_{c0})$ 代表电子管在沒有板流振动的平衡狀态下的电流和电压値，因此，在小振动的情形下，可以用一根直綫来近似地代表电子管的特性曲綫：

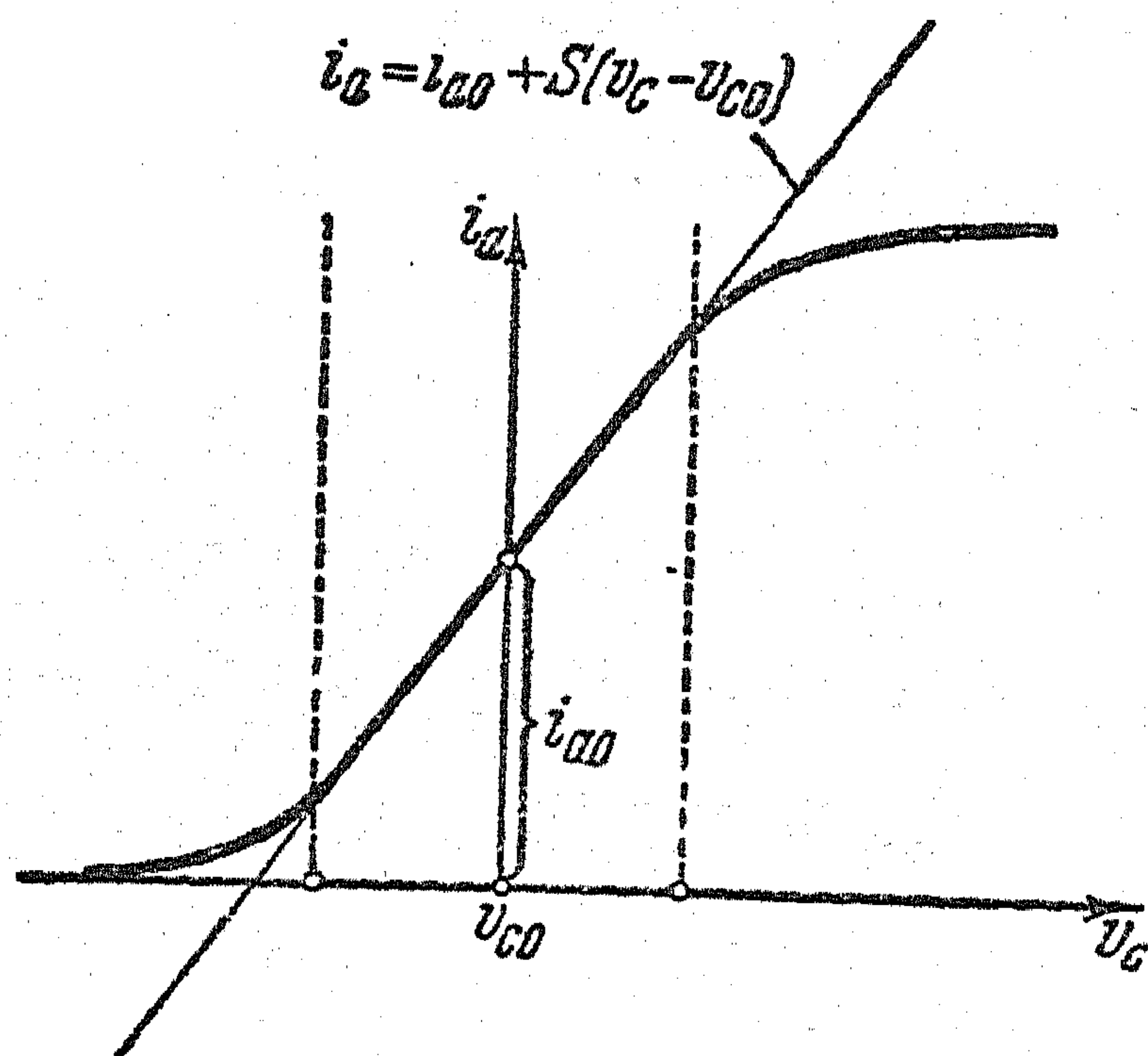


圖 31.

$$i_a=i_{a0}+S(v_c-v_{c0}),$$

其中 S 是常数，称为互导（圖 31）。

由綫路中不难看出，$v_c-v_{c0}=\frac{q}{C}$ 等于电容器上的电压，因此

电子管特性曲綫的方程式具有下列形式:

$$i_a - i_{a0} = \frac{Sq}{C},$$

將 i_a 的这一値代入方程式(6.2),便得:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \pm\frac{MS}{C}\dot{q}, \tag{6.3}$$

或

$$L\ddot{q} + \left(R \mp \frac{MS}{C}\right)\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

和通常一样,用 $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ 及 $2\delta = \frac{R}{L} \mp \frac{MS}{LC}$ 表示后,我們便正式导出标准形式的阻尼振动方程式(4.3)。

可是現在阻尼 δ 却依存于耦合系数 M 及互导 S。

一般这样选擇 M 的值,俾使其减小阻尼 δ; 我們以后会知道,这是为了改进訊号的接收所必需的。因此,在迴路中的固有振动比沒有反饋时要衰减得慢得多。

变更綫圈間的距离,来增加 M,可以做到使 $\delta=0$,甚至可以使 δ 为負値。这时,电路將具有負阻尼。因此一般具有方程式(4.3)的振动系統,当 $\delta<0$ 时,可称为具有負阻尼的系統。

在这种系統中,振动將按指数規律增長起来(圖 32):

$$q = Ae^{\delta t}\cos(\omega_1 t + \alpha).$$

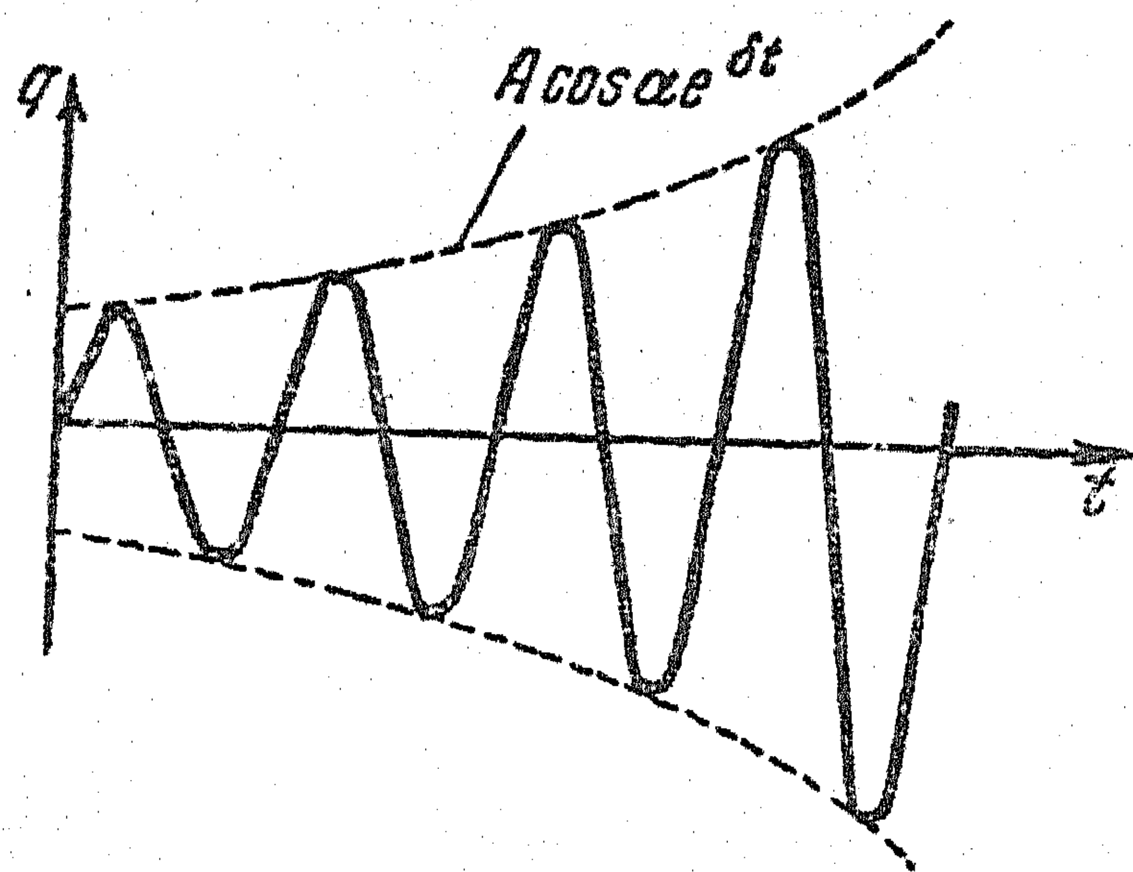


圖 32.

由于随便多么小的一点起始冲击,振动会增長到無穷大。

由理論得出的無穷大的振动,在实际上是永远也不会發生的。为什么会如此呢?問题在于:当我們建立基本方程式(6.3)时,曾經假設在 q 与 i_a 之間存在着綫性关系,而这仅仅对圖 31 上兩虛綫間的电子管特性曲

綫，即对特性曲綫的直綫部分說，才是正确的。一旦 q 增加到这样的值，以致 $v_c-v_{c0}=\frac{q}{C}$ 进抵虛綫时，方程式(6.3)就变得不适用了。要进一步解振动問題，必須解非綫性方程式。

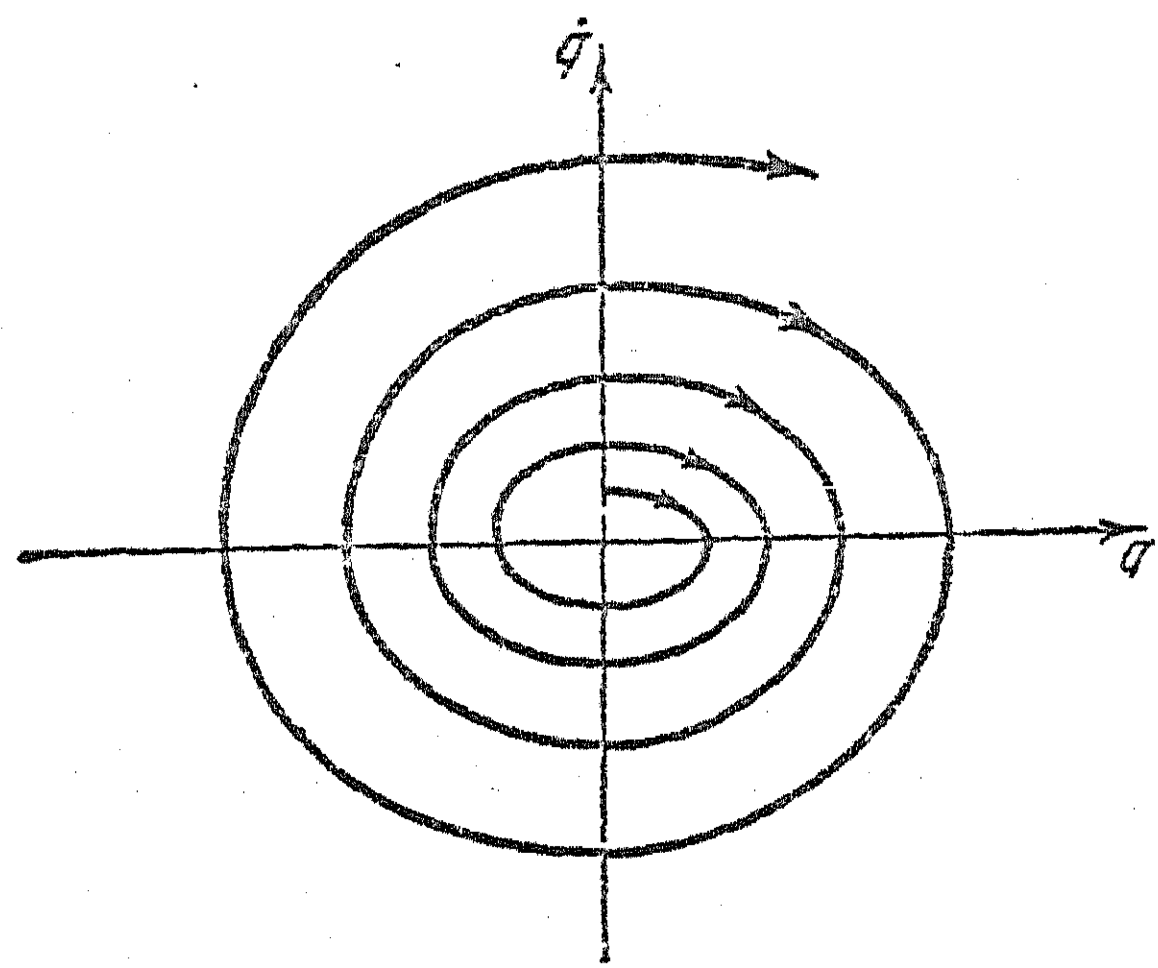


圖 33.

对于綫性区域內迴路中的振动，在相平面$(q, \dot{q})$上是用外盤螺綫来表示的（圖33）。在这种情形下，对应于平衡狀态的奇点，称为不穩定焦点。在后面自动振动那一章里，將闡明关于非綫性問題的解法。那里我們將看到：振动將停止上升并会在系統中建立駐常的周期振动（自动振动）。

具有負摩擦的摆

在一个平滑可轉动的軸 A 上，紧紧地套着一个套管 B，套管 B 与摆杆 C 結成一个整体（圖 34）。如果軸以恒定的角速度 Ω 旋轉，那末，在軸对于套管的摩擦力矩与滑动速度之間具有一定的依存关系时，会使系統中产生負阻尼。滑动摩擦力由滑动速度 ω 决定，因此，摩擦力矩决定于軸与套管的相对旋轉速度。可以这样选擇軸与套管之間的压力与材料，使得由滑动角速度 ω 决定的、作用于摆上的摩擦力矩，具有如圖 35 所示的形式：当旋轉速度微小时，力矩保持恒定，之后力矩开始下降，等降到某一数

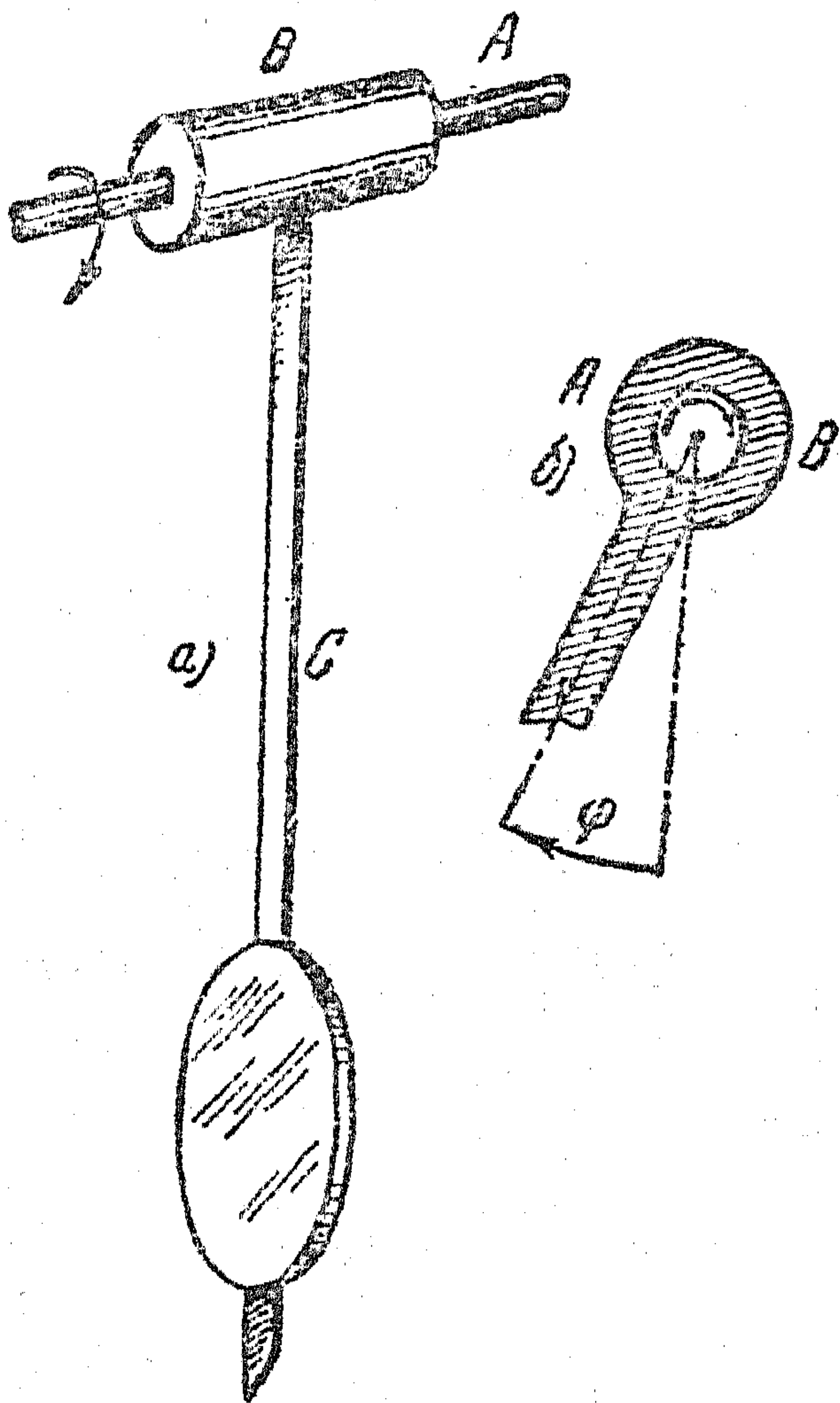


圖 34.

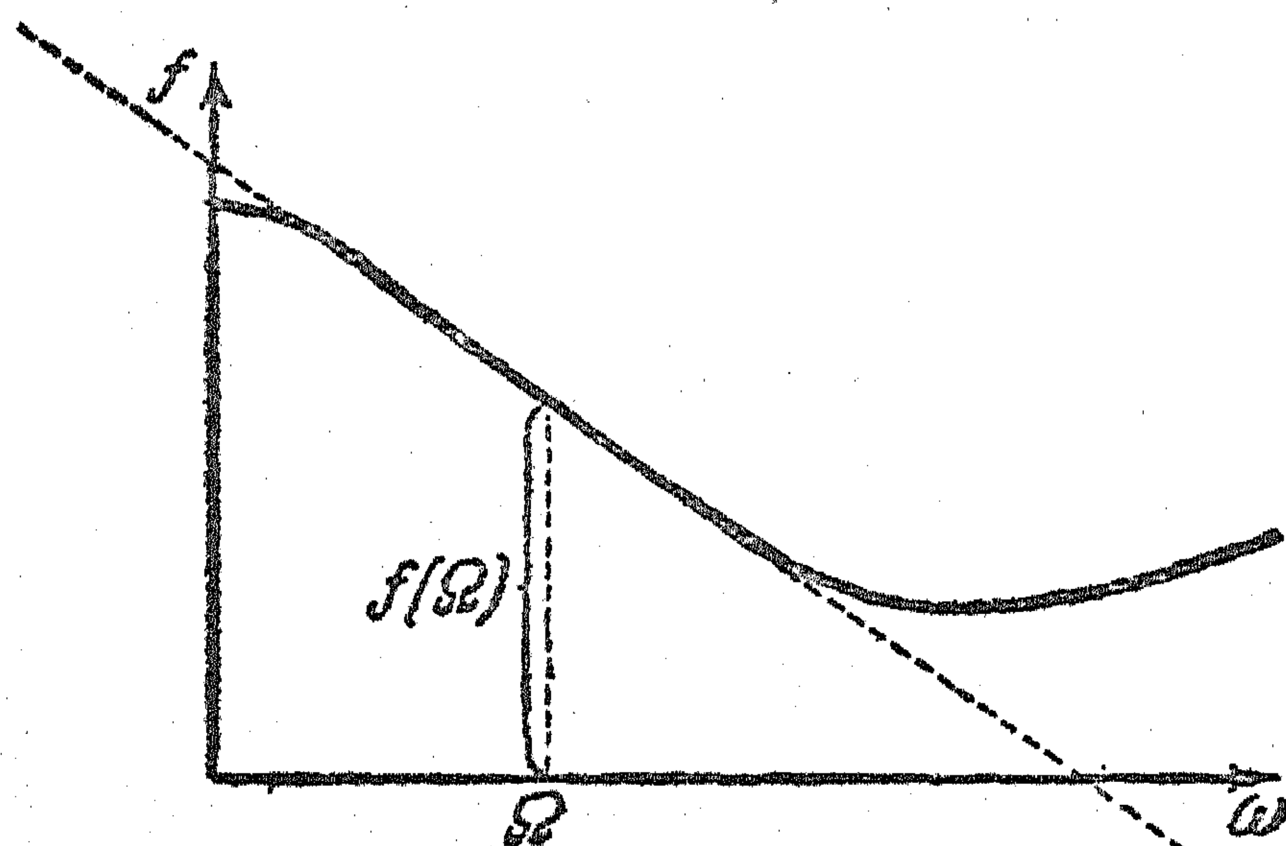


圖 35.

値后，又开始增加起来。

軸以速度 Ω 旋轉着，相对滑动角速度 $\omega=\Omega-\dot{\varphi}$，其中 $\dot{\varphi}$ 是摆振动时的旋轉角速度。

当振动微小时，摆的往复振动的方程式可以写成：

$$I\ddot{\varphi}+b\dot{\varphi}+Mga\varphi=f(\Omega-\dot{\varphi}),\tag{6.4}$$

其中 φ 是摆对鉛直綫的偏角，$b\dot{\varphi}$ 是摩擦力矩（除掉軸的摩擦力矩），$Mag\varphi$ 是重力矩（M 是摆的質量，a 是由摆的重心到軸的距离，g 是重力加速度），$f(\Omega-\dot{\varphi})$ 是軸的摩擦力矩，I 是摆的轉动慣量。

現在研究这样的微小振动，其中 $|\dot{\varphi}|\ll\Omega$，故摩擦力矩可以展开为泰勒級数：

$$f(\Omega-\dot{\varphi})=f(\Omega)-c\dot{\varphi}+d\dot{\varphi}^2+\cdots,$$

其中 $c=\left(\frac{\partial f}{\partial\omega}\right)_\Omega$ 等等。

如果只取这一級数的綫性項，并將其代入方程式 (6.4)，便得到摆的振动方程式：

$$I\ddot{\varphi}+b\dot{\varphi}+Mga\varphi=f(\Omega)-c\dot{\varphi}.$$

变更偏角 φ 的讀数起点，或者引入新坐标 $\psi=\varphi-\frac{f(\Omega)}{Mga}$，那末，摆的振动方程式为：

$$I\ddot{\psi}+(b+c)\dot{\psi}+Mga\psi=0,\tag{6.5}$$

很明显，上式和 (6.3) 式完全等效。其阻尼系数为

$$\delta=\frac{1}{2I}(b+c).$$

如果 $c=0$，那末，悬垂便是“理想的”，它的意思是：在摆的振动

中，不会由于軸的摩擦力，而引入阻尼。等式 $c=0$ 表示"工作点"是选擇在摩擦力不依存于速度的特性曲綫部分。莫斯科大学教授H. E. 茹可夫斯基曾經指出过在这种情况下"理想悬垂"存在的可能性。

如果將軸的旋轉速度 Ω 选擇得使 $c=\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)_{\Omega}<0$，或者如圖 35 所示，將"工作点"选擇在摩擦力矩特性曲綫的下降部分，那末，軸的摩擦力矩將是"負値"，从而振动的阻尼比这一摆为理想悬垂时的振动的阻尼要小些。

当負数 c 的絕对値大于 b 时，系統便具有負阻尼。这时任何微小的冲击都会在系統中产生增長振动。

値得注意的是：当具备着下降的特性曲綫时，并不需要复杂的推論就可以断定，軸的旋轉將使摆不断地来回摆动。其实，当摆套在正旋轉着的軸上并作振动时，在其振动的半个周期內，軸与摆向同一边走去，因而軸对套管的摩擦力矩，有助于摆的振动，摩擦力所作的功，增加摆的振动能量。而在下半个周期內，当軸与摆向不同的方向运动时，因为滑动速度比上一情形的大些，于是，摩擦力矩便比上一情形小些，从而消耗摆的能量的摩擦力矩的功也較上一情形小些，因此，在整个周期內，軸以能量供給摆，并增加其振动的振幅。

当在特性曲綫的綫性区域內振动时(圖 35)，振动振幅逐漸增加。然而一旦振动达到这样的値，以致摩擦力矩將越出綫性部分的边界时，与前面的情形一样，振动便由非綫性方程式来确定。当振动振幅为某个値时，振幅停止增加，并会在系統中产生稳定的周期振动(自动振动)。

应当指出，具有負阻尼的例子，并不如表面上看起来那样稀少。

总之，研究固有振动时，我們遇到兩种不同类型的現象，1)阻

尼振动，2)增長振动。它們之間的区别在于摩擦力的符号。重要的是，对于第一类說，綫性理論將提供过程的全面描述，在很多情形中，非綫性項的忽略，(基本上)不会引起理論与实驗上的重大分歧。而对于第二类說，便不是如此，在这里綫性理論总引起与实驗的分歧，它只能正确地描述过程的起始阶段，在过程的往后时間中，微小的非綫性便起着主要的作用。

然而，在这种情况下，綫性理論对断定在系統中产生增長振动的条件，却很有把握。这种条件是$\delta<0$，并称之为系統的自激条件。在实际問題中，自激条件的确定常常是很重要的。

最后，讓我們指出：由公式中可以断定当$\delta=0$时，我們所研究的系統將作具有任意振幅的無阻尼振动，当然，这是指在綫性区域内而言。事实上，在現实系統中不可能存在这种准确的等式$\delta=0$，物理参数总会随时作微小的变化，因此δ便会大于或者小于零，但畢竟保持一非常小的値。而这一符号的变化会在系統中引起运动特性的重大变化，于是在这种情况下將發生不稳定振动：时而是增長振动，时而是阻尼振动。

第二章　非綫性守恒系統的固有振动

§7. 非綫性守恒系統的振动

到此为止，我們研究过綫性系統的固有振动。現在讓我們来研究非綫性系統的振动，这种系統的运动系由非綫性微分方程式描述的。由于解非綫性方程式有几乎不能克服的困难，因此，对于每一特殊情况下的非綫性振动的物理分析，都必須用它本身所特有的方法。

在力学中，常碰到这种例子，即(彈)力与形变間的依存关系是非綫性的。直綫比例定律(虎克定律)一般仅在微小形变时才是正确的；随着形变的增加，力的大小一般会比形变增加得慢些，在結構复杂的振动中，随着形变的变化，有时有某些新的彈性元件参加“工作”，或者相反地，有某些元件退出“工作”。

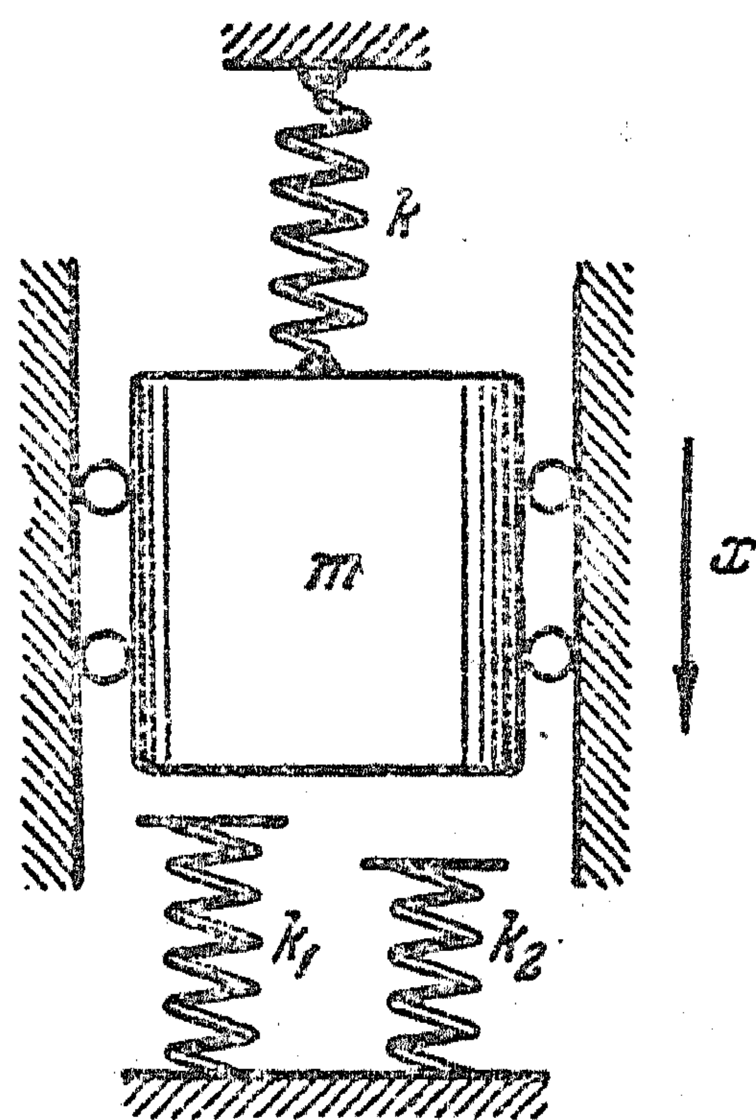


圖 36.

这种系統的例子，如圖 36 所示。彈簧 k 上質量为 m 的物体，在导軌中振动着。随着振动的增加，彈簧 k_1, k_2 將参加工作，以致即令認为这些彈簧是綫性的，而彈力特性曲綫將是非綫性的。这种特性曲綫的典型形式，如圖 37 所示。

在力学中，很少遇到非綫性的慣性項，在电学中，“彈性”以及“慣性”項都可能是非綫性的。例如具有鉄心綫圈的振动迴路，可用下列形式的方程式表示：

$$n\frac{d\Phi}{dt}+\frac{q}{C}=0,$$

其中Φ是与綫圈交連的磁通，q是电容器上的电荷，n是綫圈的匝数，C是电容器的电容量。

Φ与电流$\dot{q}$之間依存关系的特性曲綫如圖 38 所示。适当地选擇系数α和γ，則在$\dot{q}=0$附近区域的磁通特性曲綫，可以用三次多項式来近似地表出：

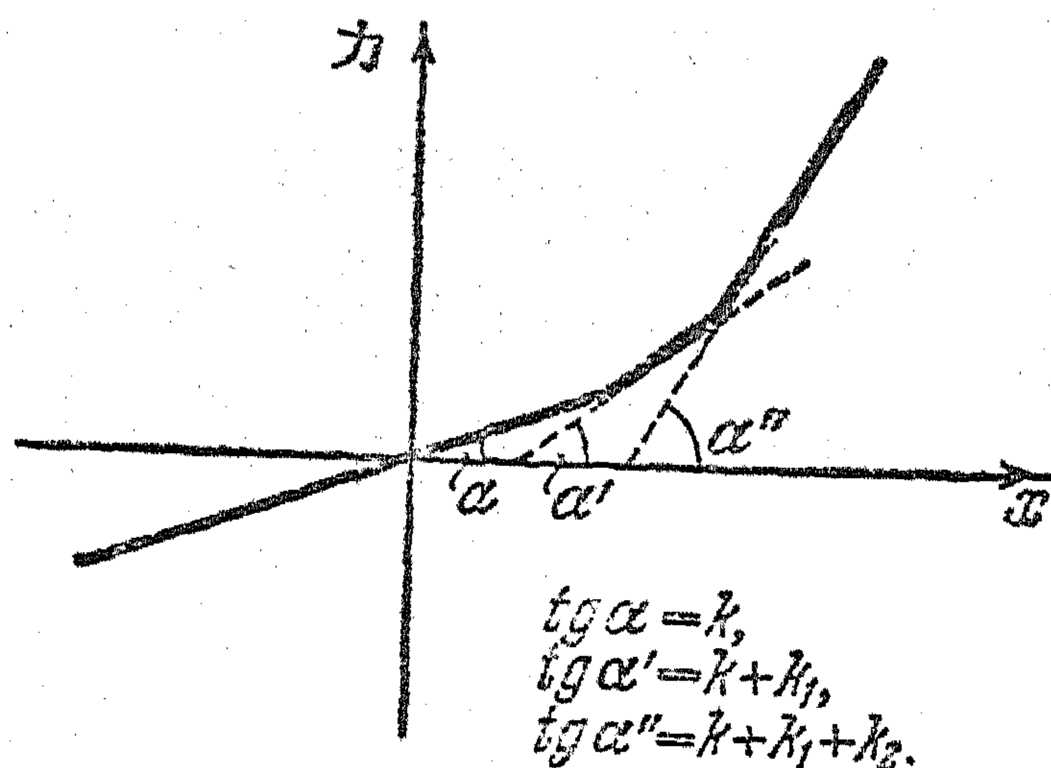


圖 37.

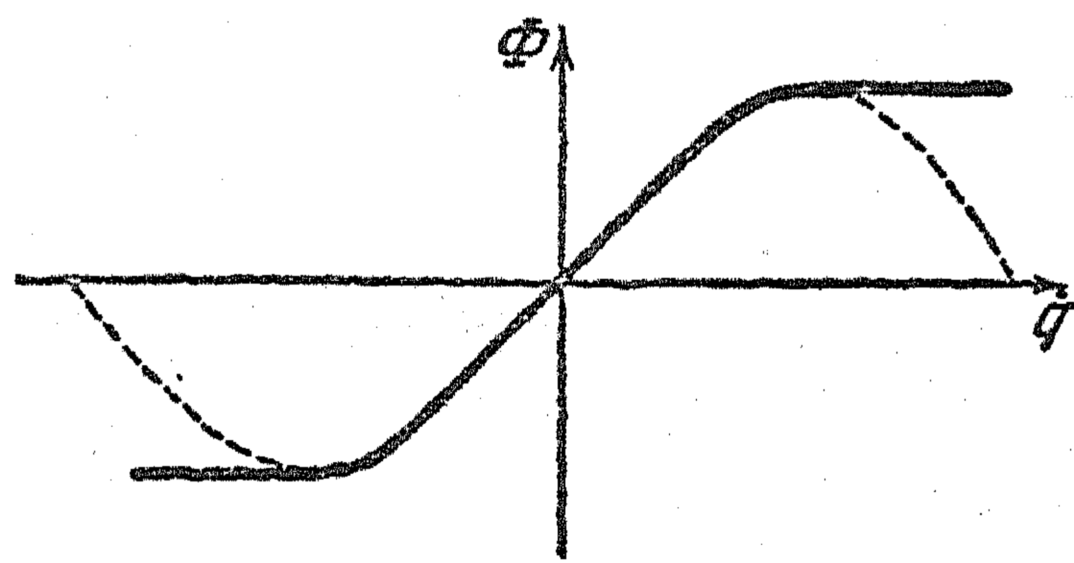


圖 38.

$$\Phi=\alpha\dot{q}-\gamma\dot{q}^3.$$

这一曲綫的典型路徑如圖 38 中的虛綫所示。由圖上清楚地看出，这一解析公式仅仅在一定的限度內反映着实际特性曲綫。如果取較高次的多項式来作为特性曲綫的解析式，則可以扩大解析特性曲綫与实际特性曲綫相重合的区域。

現在研究一具有非綫性彈力特性的机械振动的例子。

在一具有非綫性特性的彈簧上的質量m，其固有振动的方程式可以写为：

$$m\ddot{x}+f(x)=0, \tag{7.1}$$

其中$f(x)$是彈力。

在守恒系統中，能量保持恒定，因此，用相平面来进行振动的研究，甚为方便。因为每一相軌綫对应于一定大小的能量，所以由能量守恒定律可得出相軌綫的方程式。其实，用$\dot{x}$乘(7.1)，并取其积分后便得：

$$\frac{m\dot{x}^2}{2}+\int_{x_0}^{x}f(x)dx=E_0, \tag{7.2}$$

其中 E_0 是当 $x=x_0$ 时，起始儲藏的动能。能量方程式(7.2)將提供 y 与 x 的依存关系，也就是在相平面上的軌綫方程式。如果用 $U(x)$ 代表彈簧的位能的值，根据定义 $U(x)-U(x_0)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$，那末，相軌綫方程式(7.2)可改写为：

$$y=\sqrt{\frac{2[E-U(x)]}{m}}, \tag{7.3}$$

其中 $E=E_0+U(x_0)$ 是起始儲藏的总能量。

可先用圖解法作出这种系統的 $U(x)$ 的依存关系，然后，根据方程式(7.3)，便不难作出在相平面上的軌綫。

令 $U(x)$ 如圖 39, a 所示。沿縱坐标軸作 E 的值，曲綫 $U(x)$ 与 E 的交点对应于 $y=0$，或者相当于 x 軸与相軌綫的交点。在圖 39, б 上，按同样标尺，沿 x 軸描出相軌綫。显然，这軌綫只当 $E>U(x)$ 时才存在，并对 x 軸对称。給 E 以各种不同的值，就得到平面上的相軌綫場。最小的位能將与稳定平衡位置相对应，在最小值的附近（特别情形除外），能量 $U(x)$ 的表达式（在很小的一段內），可用一段拋物綫来代替。这对应于彈力的綫性特性，因此，在平衡点附近，相軌

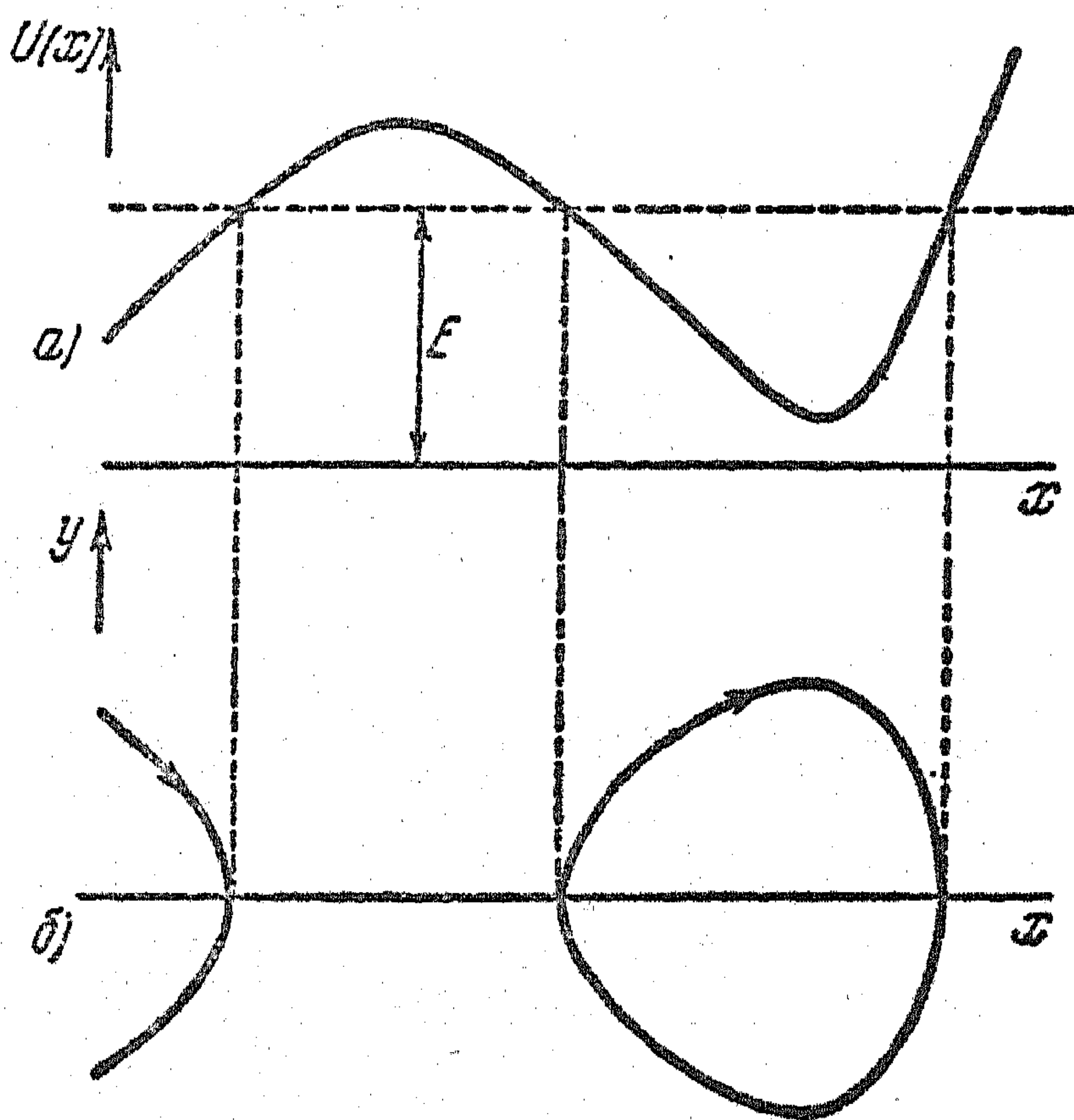


圖 39.

綫將类似于橢圓。在最小値的附近，相軌綫將是一个套着一个的閉合曲綫。

在与不稳定的平衡位置相对应的位能的最大値附近，运动的圖形將根本不同。这一圖形的特点可由圖 40 上看出，在这圖上繪着与能量 E_1, E_2, E_3 及 E_4 相对应的四根相軌綫的一部分。

有兩根曲綫 (E_3) 通过平衡点 (圖 40, б)。它們把相平面分成几个区域，在这些区域里，相軌綫具有根本不同的形式。这兩根曲綫称为分离綫。曲綫 E_1, E_2 对应于不能达到平衡位置的运动，这种运动的能量不足以使質量通过平衡位置；当运动的能量增加到大于 E_3 値时，便轉变到新的运动形式，在这种运动中，質量通过平衡位置并繼續向同一方向运动。

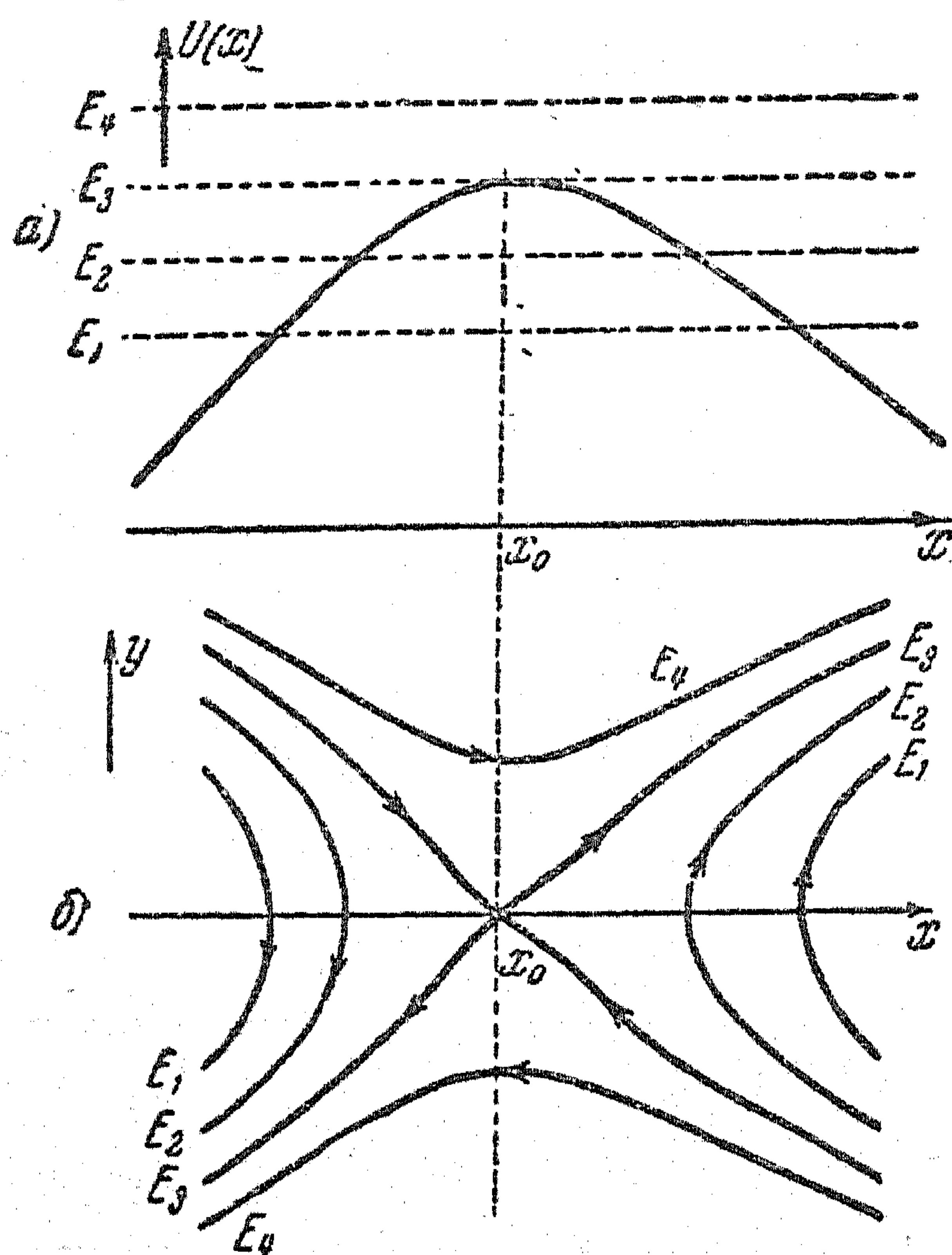


圖 40。

当研究运动时，重要的是知道分离綫，因为如果运动对应于在分离綫附近的軌綫，那末，起始儲藏能量的微小变化，会引起运动特性的重大变化。

在 x_0 点附近的运动，代表不稳定平衡狀态附近的运动。所有的描迹点都由平衡位置走出（除掉了沿分离綫的兩支运动的那些描迹点）。

如果在最大値附近，位能可用一拋物綫代表，那末，彈力將是綫性的，彈力的方向是由平衡位置向外的。在这种情况下，不难确

定，在奇点附近的积分曲綫是双曲綫，而其分离綫是漸近綫。与不稳定平衡位置相对应的奇点，在这种情况下，称为鞍点，它与山谷的地形等高綫相类似。

§8. 物理摆的振动

讓我們把研究物理摆的振动，当作守恒系統运动（及振动）的相圖的一个例子。

如果 x 是摆对平衡位置的偏角，而 P 是摆的重量，那末位能將是:

$$U(x)=Pa(1-\cos x), \qquad (8.1)$$

其中 a 是悬点至摆的重心間的距离。动能是 $\frac{1}{2}I\dot{x}^2$，其中 I 是摆对于悬点的轉动慣量。能量平衡方程式为:

$$E-Pa(1-\cos x)=\frac{1}{2}I\dot{x}^2.$$

和通常一样，令 $\dot{x}=y$，就得到相軌綫的方程式:

$$y=\sqrt{\frac{2}{I}[E-Pa(1-\cos x)]}. \qquad (8.2)$$

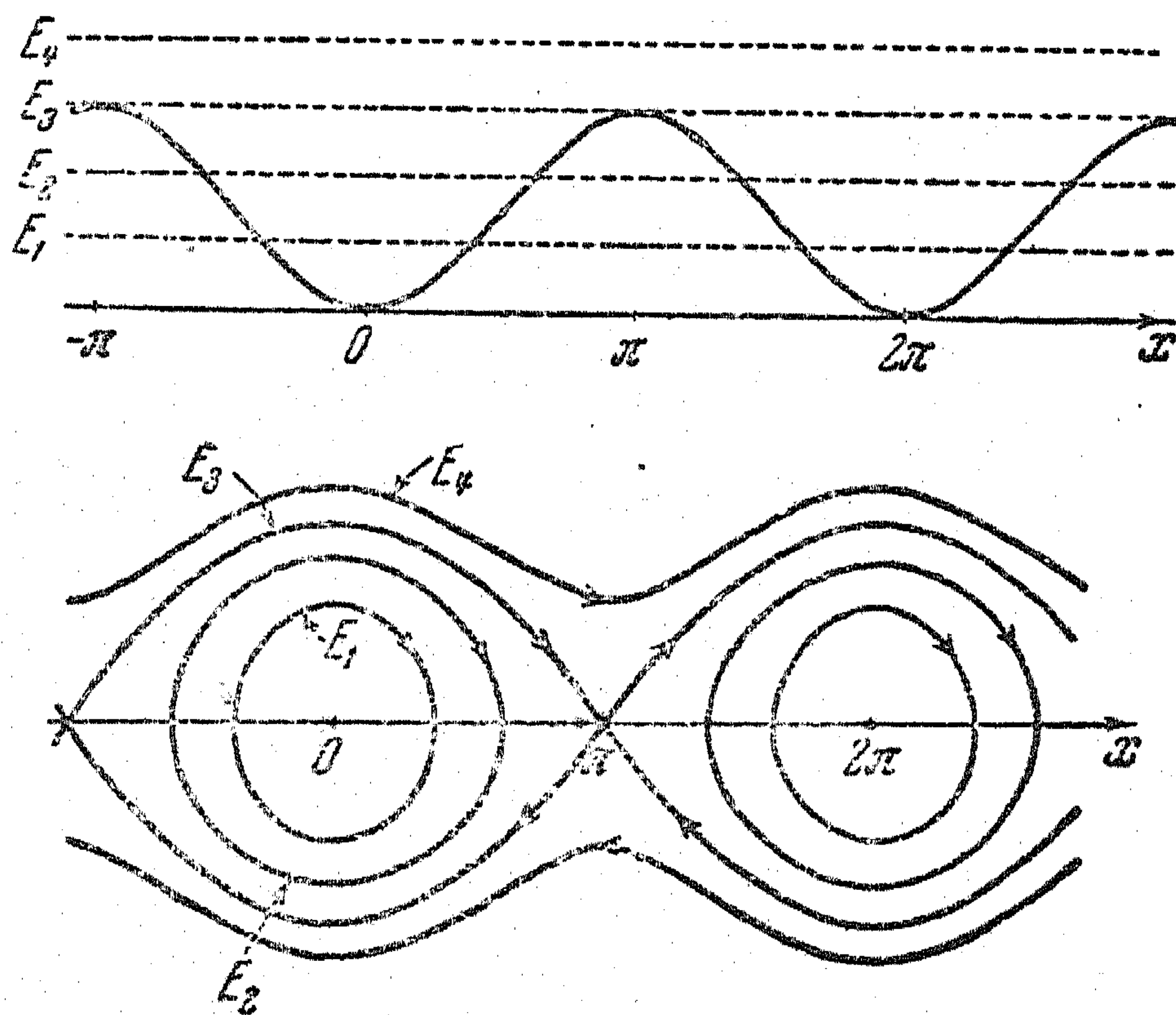


圖 41.

这些軌綫的形式以及它的繪制，如圖 41 所示。固有振动运动（曲綫 E_1 及 E_2）仅仅發生在起始动能（当 $x_0=0,\ 2\pi,\ \cdots$时）小于 $2Pa$ 时，否則，摆將向一个方向轉动，并以有限的速度通过最高点 $x=\pi,3\pi\cdots$。固然，在这种运动中，速度是振动的：在最低点具有其最大値，而在最高点具有其最小値。

通过 $\pi, 3\pi$ 等点的曲綫（与 $E_3=2Pa$ 对应）是分离綫。显然，运动不会是正弦的，因为相軌綫不是橢圓；然而，在接近于 $y=0$，$x_0=0,\ 2\pi\cdots$ 等点的区域內，相軌綫与橢圓很近似，这些点对应于最低的平衡位置，而在該位置附近的运动，大家知道，是近似諧振动。关于这，如果將相軌綫方程式(8.2)中的 $\cos x$，在 x_0 附近展开成級数，并限于展开式中的平方項时，是很容易証明的。

§9. 振动周期的确定

在周期振动运动的情形下，由方程式(7.3)可以求出四分之一周期的大小，例如求質量由最大値 x_1 到 $x_0=0$ 所用的时間。

方程式(7.3)可以写成：

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]},$$

或者 (9.1)

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}.$$

如果 E 是在稳定平衡位置时（这里 y 是最大値）的动能，而 x_1 是質量对平衡位置的最大歧离値（在这点 $y=0$），那末，求(9.1)的积分时便得到：

$$\frac{1}{4}T=\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]}}, \tag{9.2}$$

其中T是振动的整个周期。对于一給定值E，由(7.3)中，令$y=0$，可以得到x_1的値，由公式(9.2)可以看出，振动周期决定于起始能量，决定于振动的大小。因此，把系統的固有頻率作为該系統的一种特性的这一概念，便失去了意义，因为系統可能有各种不同的振动周期。將$U(x)=Pa(1-\cos x)$代入(9.2)，便不难得到物理摆的周期的公式。由这公式可以看出，摆的振动周期T是随起始条件而变化的：

$$由\ T_0=2\pi\sqrt{\frac{I}{Pa}}\ 到\ \infty。$$

当描迹点沿圖41中的分离綫($E=Pa$)运动时，周期將等于無窮大。

非綫性守恒系統的振动周期与起始条件的依存关系，通常称为固有振动系統的非等时性，以区别于綫性系統固有振动（諧振动）的等时性。

实际上，用一般方法来求决定振动周期的(9.2)这一积分，常常無法作出。对于物理摆說，这一問題的解答引向新函数（橢圓函数）的發現，把摆的位能表达式(8.1)代入(9.2)后，(9.2)这一积分也就是这个新函数的定义。因此，必須采用近似的积分方法。在对精确度要求不高的情形中，可以按照圖42所示的圖形，用圖解法求得(9.2)式这一积分。

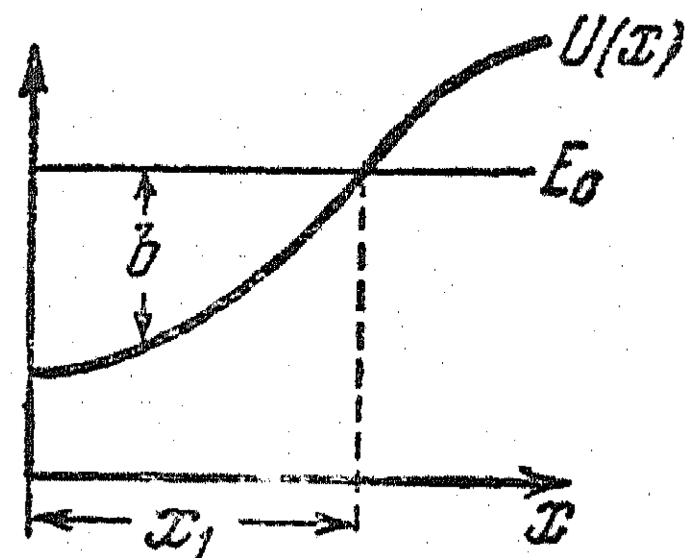


圖 42.

引用一些表示符号，这些符号的意义可由圖42上看出，則(9.1)便可写成：

$$y=\sqrt{\frac{2b}{m}}\ 厘米/秒;$$

因而(9.2)可写成

$$\frac{1}{4}T=\int_0^{x_1}\frac{dx}{y}\text{秒。}$$

$\frac{1}{y}$一量为 x 的函数，若將这函数的圖形作出并按所用标尺求得划綫区域的大小，我們就得到所要找的周期的近似値(圖 43)。

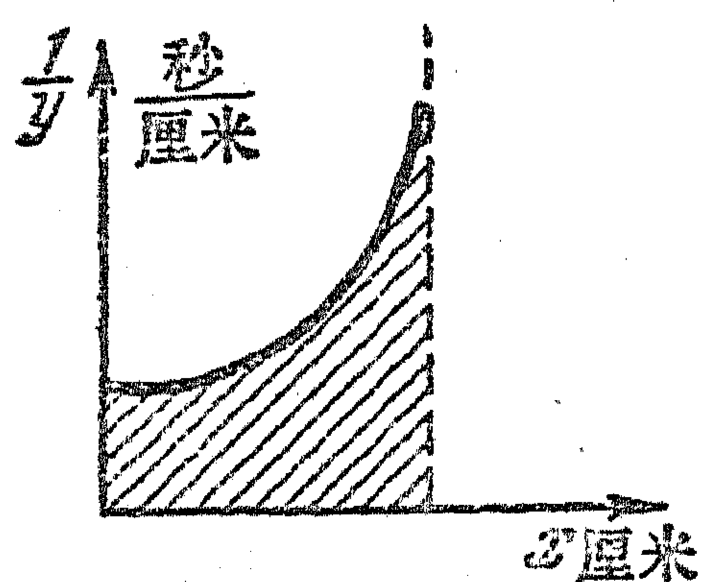


圖 43.

当 $x=x_1$ 时，$\frac{1}{y}$变为無穷大，这在实际上并不引起任何困难。

我們再来研究一个例子：質量在具有余隙的彈簧中的固有振动(圖 44,a)。質量 m 在导軌中作無摩擦的水平振动，但固定在兩壁上的彈簧相当短，其中有一定間隔（“余隙”）。在間隔中，質量不受彈力的作用。彈力 $f(x)$ 的特性曲綫如圖 44,$б$，而我們認为每个彈簧的特性都是綫性的，其剛度各等于 k_1 及 k_2。在 x_2-x_1 这一段(“余隙”)上，質量运动是由于慣性的緣故，这里的相軌綫將与 x 軸平行；在 $x<x_1$ 那一段上的相軌綫是半个橢圓，它对应于具有頻率 $\sqrt{\frac{k_1}{m}}$ 的諧振动，描迹点一直沿着这橢圓运动，直到質量进入到

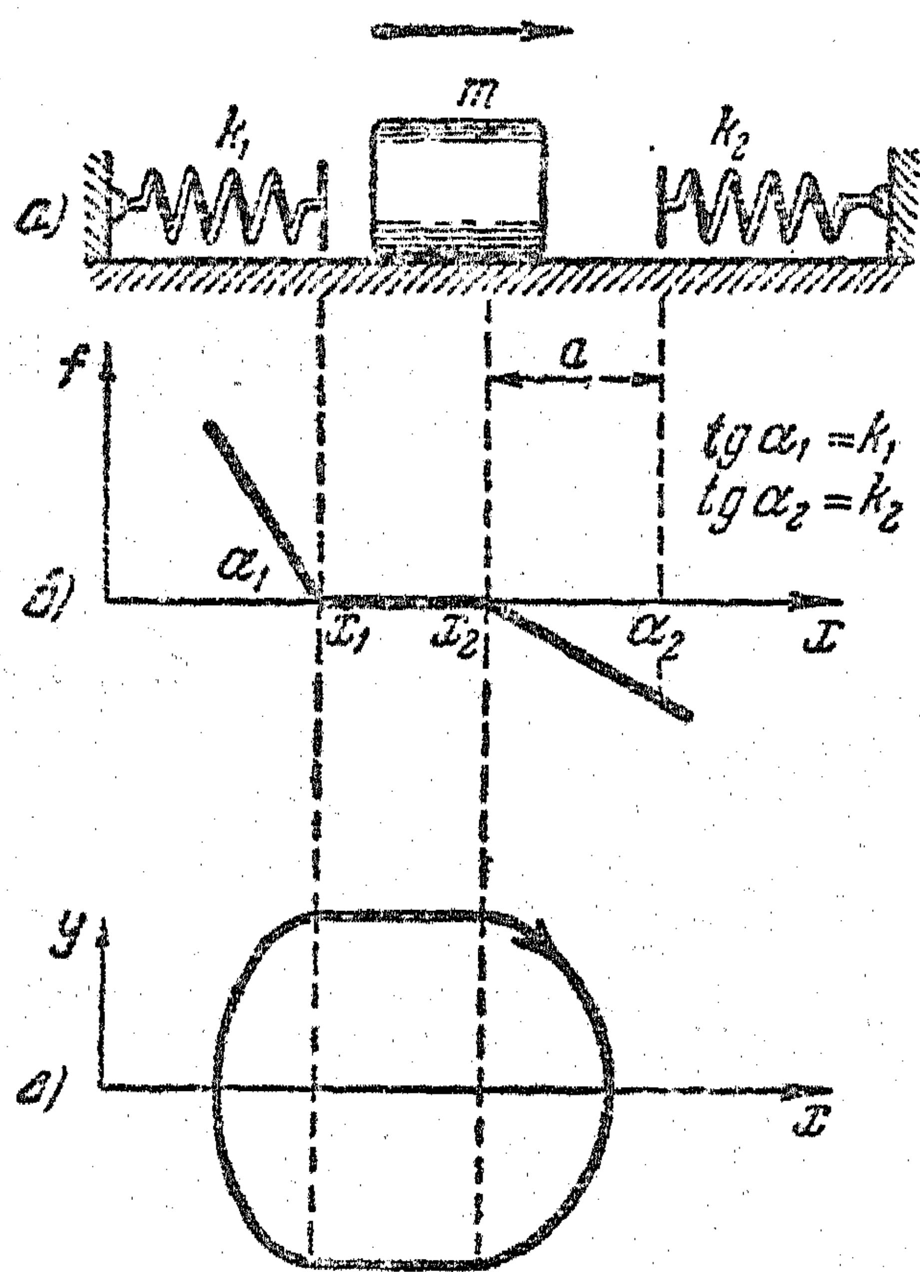


圖 44.

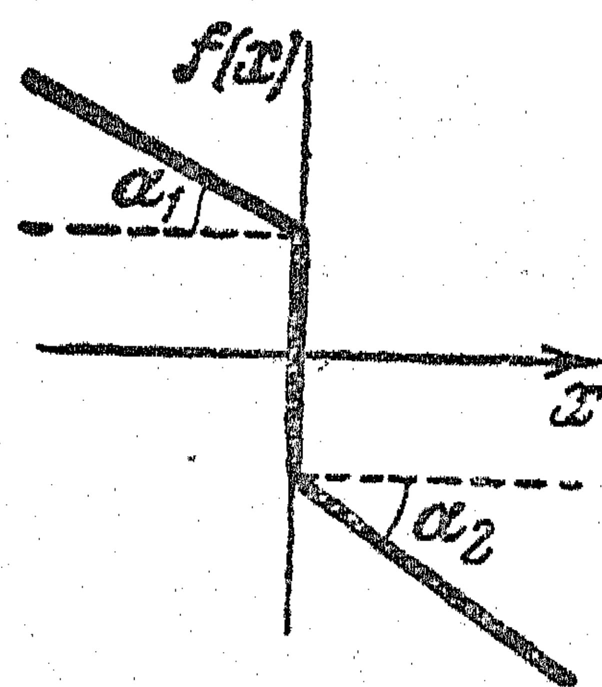


圖 45.

$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$余隙区域以前为止；当$x > x_2$时，描迹点沿着另外半个椭圆进行，这半个椭圆对应于频率为$\sqrt{\frac{k_2}{m}}$的諧振动(圖44, в)。

很显然，振动周期T將等于：

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} + \frac{2l}{v_0} + \pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} = \frac{2l}{v_0} + \pi\sqrt{m}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right),$$

其中v_0是最大速度，l是余隙的長。

显然，随着v_0的增加，周期趋近于：

$$T_0 = \pi\sqrt{m}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right);$$

而当v_0減小到零时，$T \to \infty$。彈簧的冲击將如此的小，以致質量將总在余隙中不停地运动着。

这里要即时指出，在这种極端的情况下，即当$v_0 \to 0$时，我們的方案——守恒系統的方案——与实际的过程相差甚远。

習　題

想出一个机械系統，其彈力特性曲綫具有如圖45上所繪的形式，試在相平面上分析这一系統中的固有振动，并求其振动周期。

第三章　在綫性系統中的受迫振动
（在外力作用下的振动）

§10. 前言

到現在止，我們曾研究过固有振动。在这种振动时，系統是与任何外来的作用相隔离的。在隔离了的系統中，振动仅在外来的作用之后方能發生①，外来作用决定着起始歧离与起始速度——起始条件，而起始条件單値地决定着在系統中今后的过程。系統本身（它的構造），由固有振动的观点看，决定着标明振动过程的兩个参数——固有頻率 ω 及减縮 ϑ（或者阻尼系数 δ）。相反地，在外力作用下系統中的振动，或者所謂受迫振动，則不仅决定于系統的構造，不仅决定于系統的参数（ω 及 δ），并且也决定于外力。

在外力 $f(t)$ 的作用下，綫性机械振动系統中的振动方程式可以写为：

$$m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=f(t), \qquad (10.1)$$

其中 $f(t)$ 是已給的时間函数，它不依存于系統的参数以及在系統中的过程。

应注意到，在机械中"給出"外力并不那么簡單。常常說：取一电磁鉄，通电流于电磁鉄中，則作用于物体的磁力（假如物体是由磁性物質所組成的）將作与电流强度成正比的变化。这仅仅在这种情形下，即假定質量的振动發生在均勻磁場中时才是正确的。但，均勻磁場却总是不容易实現的。

由机械的方法来实現对机械振动系統的外来作用，其最簡單

---

① 即令是在增長振动的情形下！

的方法之一，是使系統的某一定点产生位移，这样的例子，如圖 46 所示：由專門的机器使点 A 产生一定的位移 $u(t)$，令質量 m 由平衡位置向下的歧离为 x，那末，不計算摩擦力时，質量运动的方程式可以写为：

$$m\ddot{x}+kx=k'(u-x),$$

或者

$$m\ddot{x}+(k+k')x=k'u(t),$$

这就表示，力 $k'u(t)$ 作用于一具有頻率 $\sqrt{\frac{k+k'}{m}}$ 的系統上。假如我們希望用这样的方式，給出一个作用于剛度为 k 的彈簧上的質量上的外力，也就是給出一个作用于一具有頻率 $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 的系統上的外力，那末，必須这样选擇彈簧的剛度，使 $k'\ll k$，并这样选擇 $u(t)$，使得 $k'u(t)$ 有足够的大小。

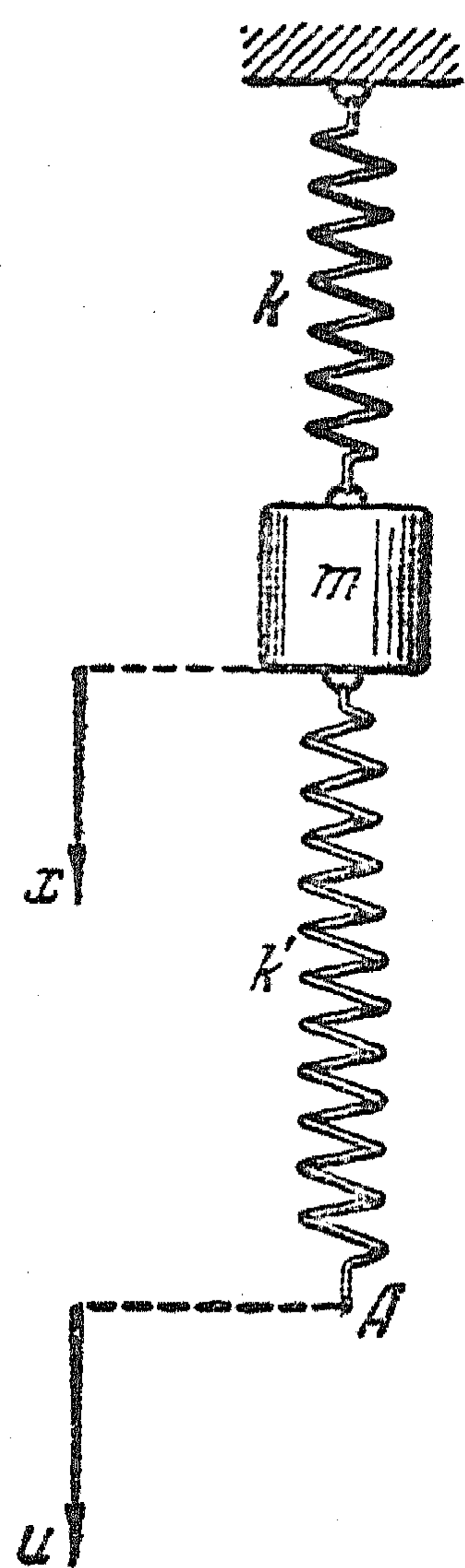


圖 46.

在电的振动中，外来作用多半是作为在电迴路中的感应电动势来給出的。如果外来磁通的大小不受在系統中的振动反饋的影响，那末，这种电动势便可認为是已給的时間的函数。

我們指出，还有作用于振动系統的其他的方法，例如，外来作用可以改变系統的参数(即 ω 及 δ)。这在原則上是外来作用的另外一种形式——参数形式，在后面我們將特别来研究它。

叠加法或者叠加原理是：由不同的外力所引起的振动，不互相依存。在綫性系統中，由于叠加法，大大的便利了受迫振动的分析。

令外力 $f_1(t)$ 引起受迫振动 $x_1(t)$；外力 $f_2(t)$ 引起振动 $x_2(t)$。那末，在这一系統中，由外力 $f=f_1(t)+f_2(t)$ 所引起的振动，將是

$x_1(t)+x_2(t)$。如果一些不同的外力同时作用于系統上，那末，由这些外力所引起的振动，也和外力一样，彼此相加。直接代入方程式，譬如(10.1)，可以証明这一点。

为了理解振动的过程，重要的是得首先研究周期性外力对系統的作用。但大家知道，任何一个具有周期 T 的周期性外力，总可以用一些正弦力的和来表示，这些力的頻率可以为 $\frac{2\pi n}{T}$ 中的任何値，其中 n 为任意正整数。因此，由于叠加原理，要解关于周期性外力对綫性系統作用的問題，只要知道一定頻率的正弦（諧）力对系統作用的結果便够了。

§11. 諧(正弦)力对沒有摩擦的綫性系統的作用

在实际中，很少碰到一个"純"諧外力。然而，有很多情形却可以近似地認为是一个諧力的作用。譬如，当机器均匀旋轉时，由其不平衡的轉子所引起的振动就是一个例子。这里可以認为：离心力在某一定方向产生一个具有机器旋轉頻率的純諧力。

在电工学中也完全一样，如果一个平面形綫匝(或者綫圈)，在均匀磁場中均匀旋轉，其中便产生一諧外电动势；然而，由于在实际中，均匀磁場很难实現，所以外电动势总不是"純"諧电动势，或者更准确些說，外电动势是由一些諧电动势組成的。

讓我們首先研究諧外力对沒有摩擦的系統的作用。在这种情形下，机械系統的运动方程式为：

$$m\ddot{x}+kx=F_0\cos pt, \tag{11.1}$$

其中 F_0 是外力的振幅(常数)，p 是外力的圓頻率。將方程式改写成下列形式比較适宜：

$$\ddot{x}+\omega^2x=\frac{F_0}{m}\cos pt, \tag{11.2}$$

其中 $\omega^2=\frac{k}{m}$。

在数学方面的問題是：当給定了 $x(0)$ 及 $\dot{x}(0)$ 时，求 $x(t)$。大家知道，通解 $x(t)$ 是非齐次方程式 (11.2) 的特解以及齐次方程式的通解的和，而齐次方程式是令(11.2)中的 $F_0=0$ 得来的。

讓我們来求特解。假定它是具有頻率 p 的諧函数，令 $x(t)=X_0\cos(pt+\varphi)$，將这表达式代入(11.2)中，并求 X_0 及 φ 这样的値，使得在任何时間 t，它能滿足下式：

$$X_0(\omega^2-p^2)\cos(pt+\varphi)=\frac{F_0}{m}\cos pt. \qquad (11.3)$$

由(11.3)中可以看出，如果 $\varphi=0$ 和

$$X_0=\frac{F_0}{m(\omega^2-p^2)}=\frac{\frac{F_0}{k}}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}, \qquad (11.4)$$

(11.3)能成立。

因此，在所給的条件下，存在着具有頻率 p，即外力的頻率的諧型特解，从而通解，或者在一般情形下系統中的振动，將具有下列形式：

$$x(t)=\frac{\frac{F_0}{k}}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}\cos pt+A\cos\omega t+B\sin\omega t. \qquad (11.5)$$

其中 A 及 B 为由起始条件所决定的常数。

(11.5) 式中的头一項代表受迫振动，后面兩項代表固有振动。受迫振动以外力的頻率进行振动；其振幅由外力的振幅、頻率以及系統的参数来决定。和前面隔离系統中的情形一样，固有振动以頻率 ω 进行振动并依存于起始条件。因此，振动是以 p 及 ω 兩个頻率进行的，合成的振动并不是諧振动。

当 p 与 ω 相差很小时，在这种情形下系統中的合成振动 (11.5) 称为拍。它是一种时而增加时而減弱的振动。举一个例

子，假設 $x(0)=\dot{x}(0)=0$，那末將它代入(11.5)以及 $x(t)$ 的导函数后，当 $t=0$ 时，我們得到：

$$x(0)=\frac{\frac{F_0}{k}}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}-A=0,$$

$$\dot{x}(0)=\omega B=0.$$

因此，在这种起始条件下，通解为：

$$x(t)=\frac{\frac{F_0}{k}}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}(\cos pt-\cos\omega t), \qquad (11.6)$$

經过三角变換以后，得：

$$x(t)=\frac{2\frac{F_0}{k}}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}\sin\frac{p-\omega}{2}t\cdot\sin\frac{p+\omega}{2}t. \qquad (11.7)$$

这种振动的圖形如圖 47。

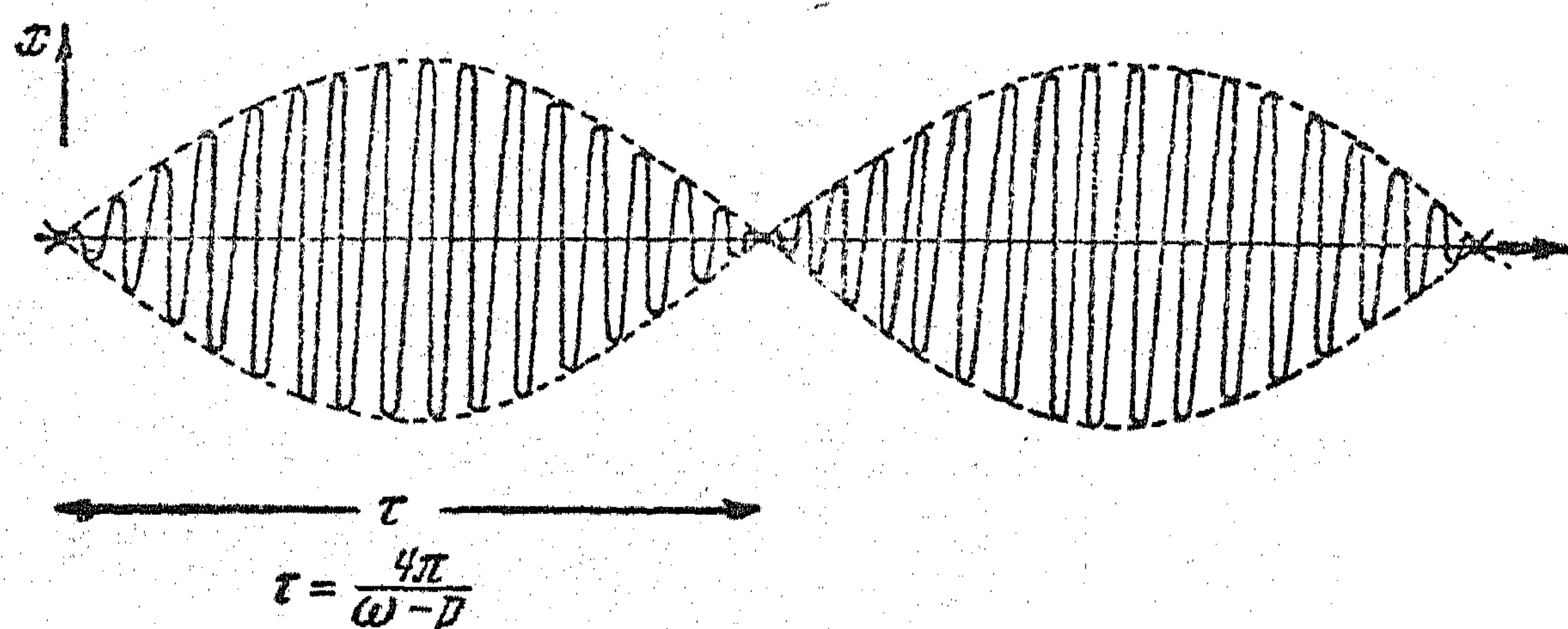


圖 47.

当 $p\approx\omega$ 时，可以把表达式(11.7)与圖形近似地看作是一个频率为 $\omega\approx\frac{p+\omega}{2}$ 并具有变变"振幅"的諧振动。振幅变化的周期为 $\tau=\frac{2\pi}{\omega-p}$。換句話說，"拍頻"等于固有頻率与外力頻率之差。

应該指出，在沒有摩擦($\delta=0$)情况下的振动，一般說来，总是

由兩种頻率的諧振动所組成的。只在某些 $x(0)$ 及 $\dot{x}(0)$ 的起始条件下，系統中的振动才是具有頻率 p 的諧振动。例如，在下列情形

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{F_0}{m}\sin pt$$

并当起始条件 $x(0)=0$, 以及 $\dot{x}(0)=pX_0$ 时，通解便具有下列形式：

$$x(t)=\frac{\frac{F_0}{k}}{1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}\sin pt.$$

上述这些仅仅具有理論上的意义。因为不管阻尼如何小，經过足够長的时間以后，固有振动总会衰减掉，于是在系統中，便只剩下具有頻率 p 的受迫振动。然而，当阻尼不大时，系統在起始瞬間的过程，却接近于这一节里所講的理想情况。

§12. 共振現象

受迫振动的振幅和外力頻率之間的依存关系由公式(11.4)表出。我們用 $\frac{F_0}{k}=a$ 表示，a 是彈簧在一大小为 F_0 的恒定力作用下的“静位移”；并用 γ 来表示頻率的比 $\frac{p}{\omega}$。那末公式(11.4)可以写成：

$$X_0=\frac{a}{1-\gamma^2},\qquad(12.1)$$

振动的振幅决定于“静位移” a 和頻率的比 γ。(12.1)的圖解如圖48所示。

在低頻率，即 $\gamma\ll 1$ 时，振动振幅差不多等于静位移，系統中的振动与外力的振动同相位；这时，質量的影响很小，彈簧就像是沒有質量似的形变着。随着頻率的提高，振动的振幅增加起来，当 γ 接近于 1 时，振幅变得十分大，而当 $\gamma\to 1$ 时，振幅 $X_0\to\infty$。这一現象，称为共振。

当外力的頻率等于系統的固有振动頻率时，理論上得出無穷大的振幅。当然，在現实的系統中，振幅为無穷大的振动是不能想像的。这就表示，当 $\gamma\to 1$ 时，我們的方案(沒有摩擦)根本不能反映現实系統中的現象。

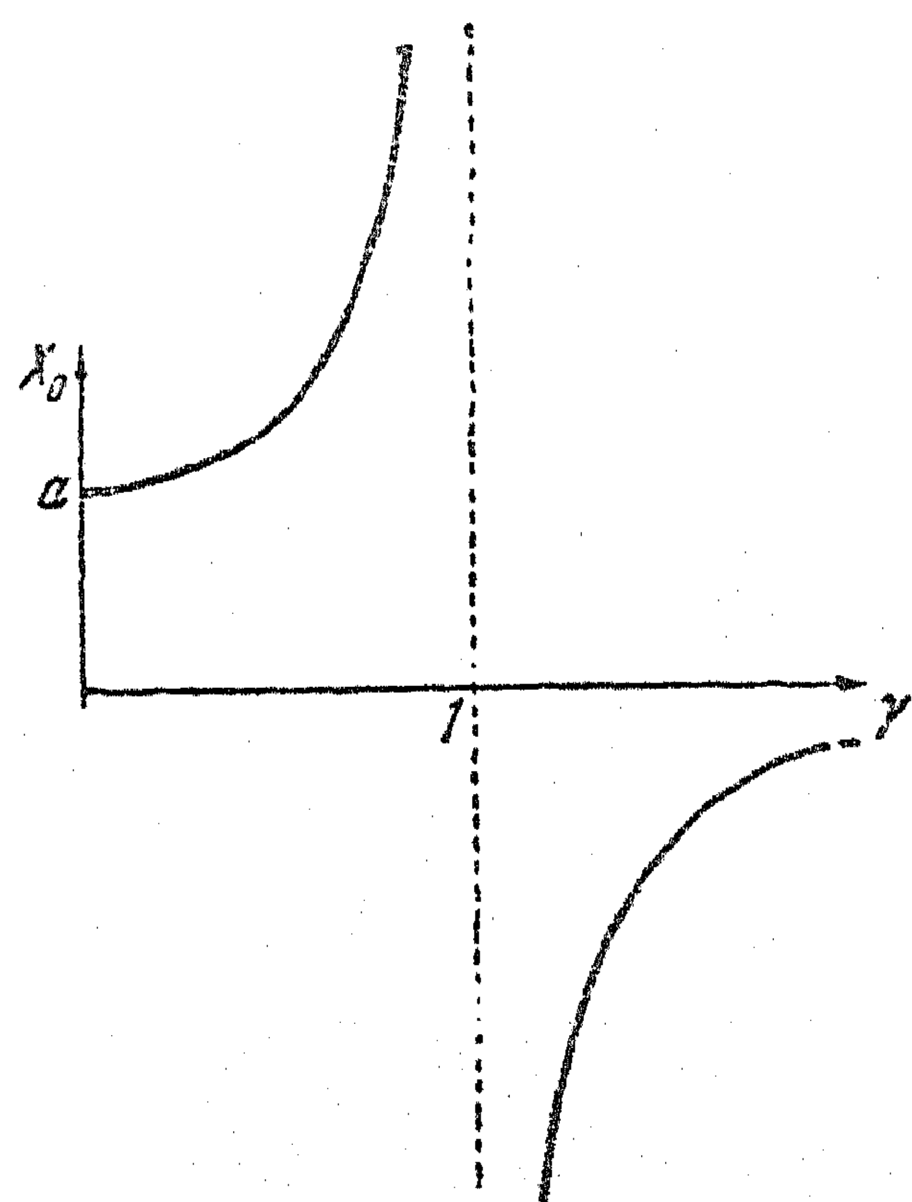


圖 48.

当 $\gamma>1$ 时，振动的振幅減小下来，而当 $\gamma\to\infty$ 时，振幅趋于零。当越过共振时，在 x 的振动与力的振动之間的相位差，突然發生大小为 π 的变化：在共振以前，和頻率很小的情形一样，力和位移同相位；在共振以后，力与位移反相位。

値得比較詳細地研究一下受迫振动的操作，并考察一下振动时各种力随时間的变化。可以把 $m\ddot{x}$ 一量称为慣性力，因此，运动方程式(11.1)可以說成：外力等于慣性力与彈簧彈力的和。

在受迫振动 $x_1=X_0\cos pt$ 的情况下：慣性力 $m\ddot{x}_1=-X_0mp^2\cos pt=-mp^2x_1$ 总是与位移反相位；彈力 $kX_0\cos pt=kx_1$ 总是与位移同相位。在共振以前，即 $X_0>0$ 时，外力与位移同相位；在共振以后，外力与位移反相位。

当 $p<\omega$ 时，各种力随时間变化的圖形如圖 49 所示。彈力与外力同相位，而慣性力与外力反相位，这兩力的差等于外力。在共振以前，因为 $k>mp^2$，彈力总是大于外力。只有当 $p\to 0$，即低頻率时，彈力与外力的差才十分小(慣性力小)。

当 $p>\omega$ 时，即在共振以后，各种力随时間变化的圖形如圖 50 所示。因为 $mp^2>k$，故慣性力与外力同相位并总是大于外力；当頻率十分高的时候，这兩力相差很小，慣性力几乎等于外力。由于

位移总是与彈力同相位，因此，在共振前，外力与位移同相位；而在共振以后，外力与位移反相位。当 $p\to 0$ 时，加速度很小，質量不起什么作用，外力差不多等于彈力。在高頻率，即 $p\to\infty$ 时，彈力十分小，外力等于慣性力。

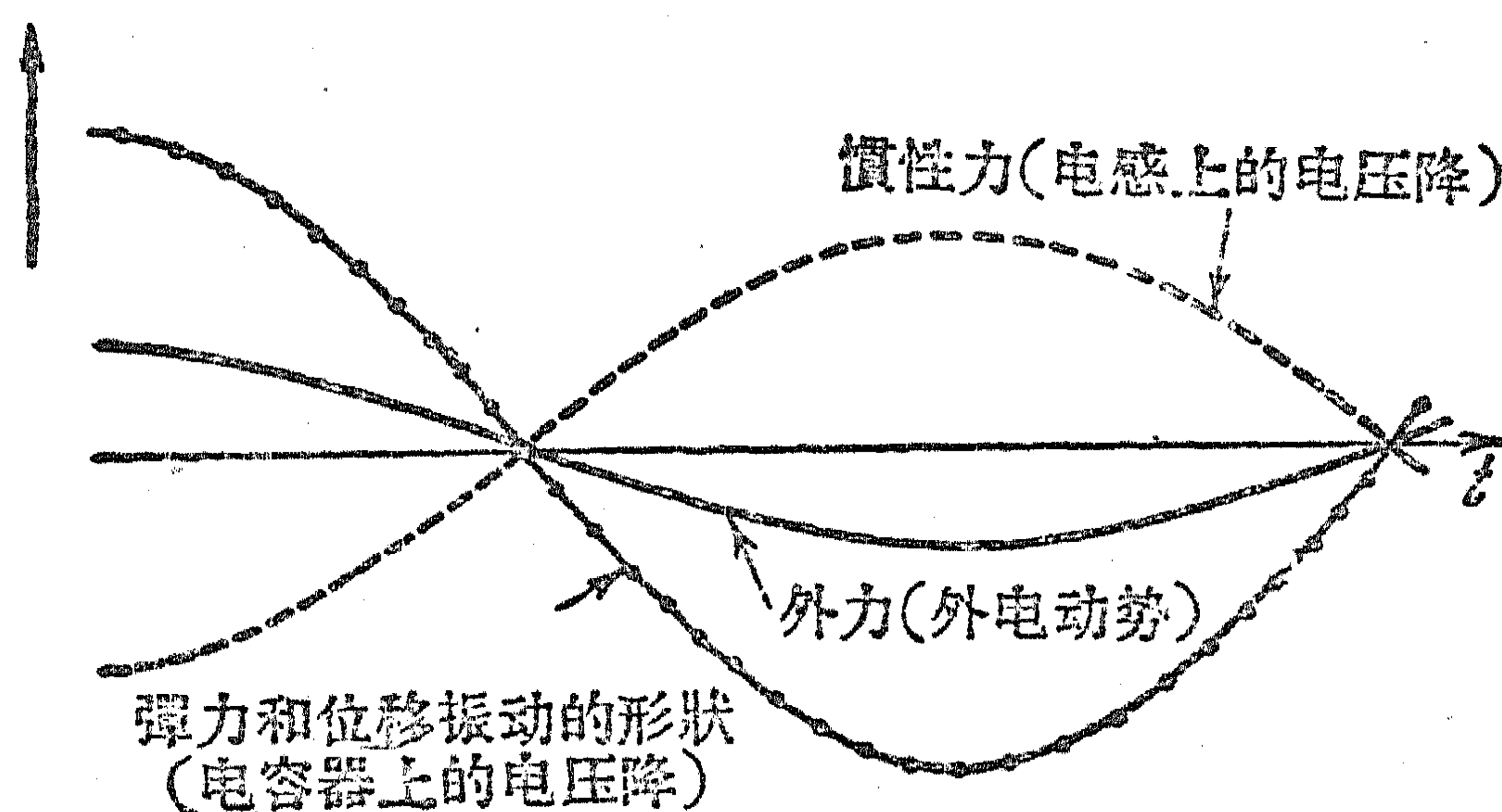


圖 49.

如果把电容器上的电荷 q_1 和位移 x_1 相类比，那末，当沒有阻尼的电迴路中發生受迫振动时，也会出現同样的情形。这里，慣性

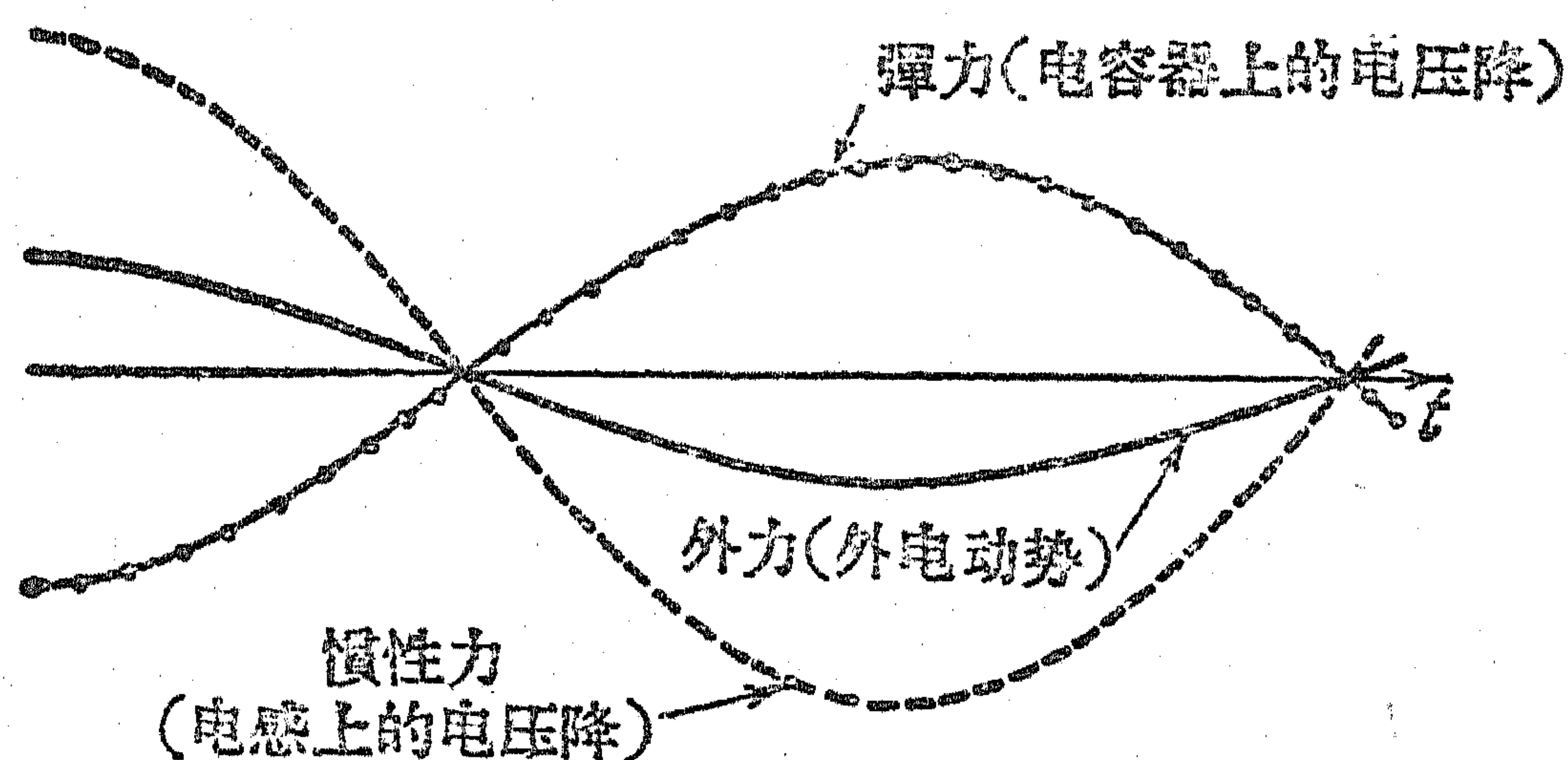


圖 50.

力与电感量上的电压降($L\ddot{q}_1$)类似；彈力与电容器上的电压$\left(\frac{q}{C}\right)$类似；外力与外加电动势类似。电感量上的电压总是与电容器上的电压反相位。在共振以前，电容器上的电压大于电感量上的电压，外加电动势便与电容器上的电压同相位；相反，在共振以后，外加电动势与电感量上的电压同相位(参看圖 49 及 50)。

§ 13. 共振时的振动形式

在共振的情形下，方程式(11.2)的解，不能用像以前那样的数学形式来表示，而必須用特殊的方法来解决，关于这一問題的一般解法，我們以后(§ 18)再討論，現在只就前面(§ 11)已經研究过的例子，看看当 $\gamma\to 1$，或 $p\to\omega$ 时，是什么情形。

在一定的起始条件 $x(0)=\dot{x}(0)=0$ 的情形下，完全方程式(11.2)的通解系由公式(11.7)来表示。現在將它写成下列形式。

$$x=\frac{2F_0}{m(\omega^2-p^2)}\sin\frac{\omega-p}{2}t\sin\frac{\omega+p}{2}t.$$

这解可以改写为：

$$x=\frac{F_0}{m(\omega+p)}\frac{\sin\frac{\omega-p}{2}t}{\frac{\omega-p}{2}t}t\sin\frac{\omega+p}{2}t,$$

当 $p\to\omega$ 时，这一表达式趋于極限。因此对任何有限的时間 t，我們得到：

$$x=\frac{F_0}{2\omega m}t\sin\omega t. \tag{13.1}$$

这就是說，在共振时，不会有稳定的諧振动。振动將作与时間成正比的增加。

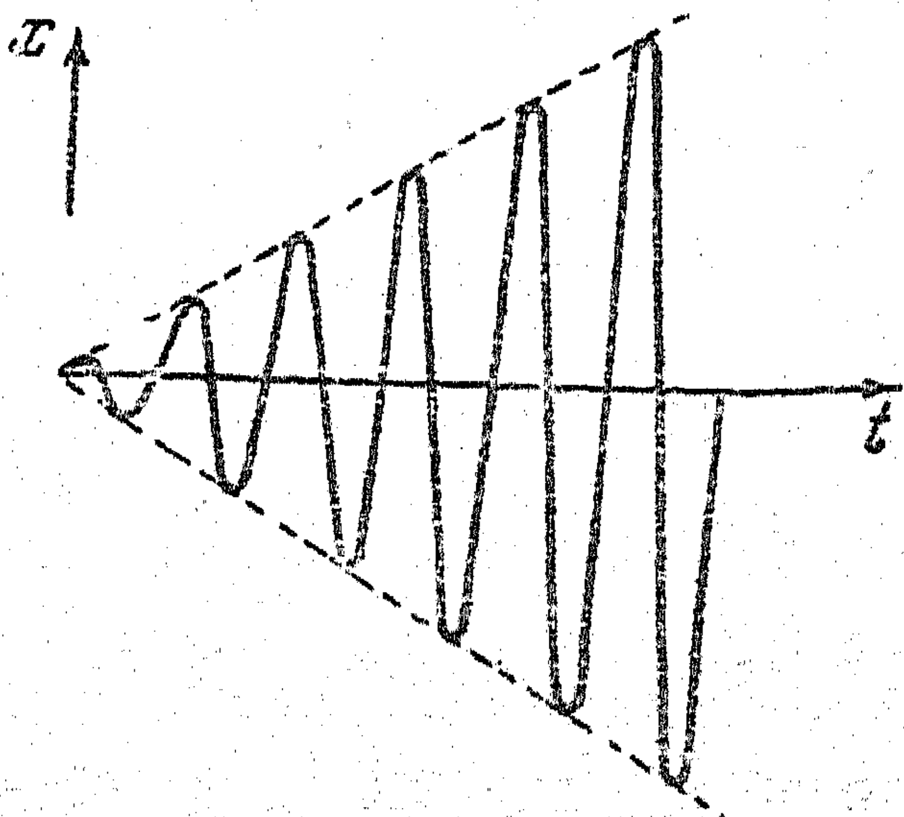


圖 51.

在物理方面，这个解不像前面具有無穷大振幅的解那样的不可想像。無論如何(当阻尼微小时)在現实系統中起始过程的情形，就与我們在理論上研究出的差不多。然而，十分显然，在任何物理系統中，随着振动振幅的增加，就出現了一些情

况，在这些情况下，原来的方程式(11.1)是不正确的，这是因为彈力的綫性規律，仅仅在一定的 x 变化范圍內才是正确的。超出这个范圍，运动的速度將增加起来，因此，不管摩擦系数怎样小，摩擦力与彈力比較起来已不能忽略。

如我們在前面(§12)所見过的，在稳定的受迫振动中，彈力和慣性力的差与外力平衡。当接近于共振时，$k\to mp^2$，因而慣性力差不多等于彈力。要平衡某个有限大小的外力，振动振幅的位移必須十分大。因为只有兩个接近的大值才能給出所需的有限大的差。

所有上面得到的結果，对于电振动也一样正确。在电振动的情形下，如曾在§4指出的，必須用外电动势的振幅 $\mathscr{E}_0$ 来代替 F_0，用电容器上的电荷 q 来代替 x 等等，这时，方程式

$$\ddot{q}+\frac{1}{LC}q=\frac{\mathscr{E}_0}{L}\cos pt$$

完全与方程式(11.2)等效。只是应該記住，在电工学中写出迴路中的振动規律时，通常用的是另外兩个量——电流或电压。

§14. 在正弦力作用下具有阻尼的系統中的受迫振动（复数振幅以及复数参数方法）

有摩擦力时，机械系統的受迫振动方程式为:

$$m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=F_0\cos pt, \tag{14.1}$$

有电阻时，电气系統的受迫振动方程式为:

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=\mathscr{E}_0\cos pt, \tag{14.2}$$

其中 q 是电容器上的电荷。这一对方程式可以写成同一种形式的方程式:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2x=f_0\cos pt. \tag{14.3}$$

与每种情形相对应：x 是位移或是电荷；$\delta=\frac{h}{2m}$ 或 $\frac{R}{2L}$；

$$\omega^2=\frac{k}{m} \text{ 或 } \frac{1}{LC}; \qquad f_0=\frac{F_0}{m} \text{ 或 } \frac{\mathscr{E}_0}{L}.$$

在(14.3)中，假如用 x 代表振动迴路中的电流，那末，δ 及 ω 兩量当然不变，但 $f_0=\frac{\mathscr{E}_0 p}{L}$。在所有的情形中，当把 x 理解为不同的物理量时，应該注意到正确地表出 f_0。

由数学中大家知道，(14.3)的解可以写成：

$$x(t)=x_1(t)+Ae^{-\delta t}\cos(\omega_1 t+\varphi), \qquad (14.3a)$$

其中 $x_1(t)$ 是非齐次方程式(14.3)的特解(受迫振动)；第二項代表齐次方程式(4.3)的通解(固有振动)；A 和 φ 为由起始条件所决定的常数。

由于系統中有摩擦，固有振动总会逐漸消失，而只剩下受迫振动。因此，在理論的大多数应用中(当然不总是这样)，我們所感兴趣的正是受迫振动这一部分的解。

讓我們对受迫振动作进一步的分析。在探討受迫振动时，常常用复数方法，这个方法有很多方便的地方。借助于它，可以在标明振动过程的各个量之間建立一个簡單明了的物理联系。

这一方法的实質如下：我們不去研究方程式(14.3)，而研究下列方程式的特解。

$$\ddot{y}+2\delta\dot{y}+\omega^2 y=f_0 e^{ipt}, \qquad (14.4)$$

其中所有的参数与方程式(14.3)中的各参数具有同样的意义；但 y 是时間的复数函数，而 $i=\sqrt{-1}$。显然，由于(14.3)与(14.4)的綫性性質，y 的实数部分將是(14.3)的解，或者說假如 $y=u+iv$ 是在 $f_0 e^{ipt}$ 情况下的解，那末，u 是同一方程式在 $f_0\cos pt$ 情况下的解；而 v 是同一方程式在 $f_0\sin pt$ 情况下的解。

求(14.4)的解比求(14.3)的解，在数学上要簡單得多。如果令

(14.4)的特解为 $y_1=\overline{X}e^{ipt}$，將它代入(14.4)幷消去 e^{ipt} 后，我們得到：

$$\overline{X}(-p^2+2\delta ip+\omega^2)=f_0,$$

或者：

$$\overline{X}=\frac{f_0}{\omega^2-p^2+i2\delta p}, \tag{14.5}$$

如果用 $X_0e^{i\varphi}$ 来代表复数量 $\overline{X}$，便不难用一般方法求出其絕对値：

$$X_0=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+4p^2\delta^2}} \tag{14.6}$$

及輻角

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{2\delta p}{p^2-\omega^2}.$$

因此，(14.3)的特解——受迫振动——具有下列形式：

$$x_1=Re(\overline{X}e^{ipt})=Re(X_0e^{i(pt+\varphi)})=X_0\cos(pt+\varphi). \tag{14.7}$$

由公式(14.5)及(14.6)可算出受迫振动的振幅 X_0 以及位移的振动与力的振动之間的相位差；幷可看出这些量与頻率 p，力的振幅，以及系統的参数間的依存关系。由数学的观点看，受迫振动的全部理論到此就告結束，例如，对于所有的問題，公式(14.5)都能提供詳尽無遺的答案，可是，我們还要对这一公式作出詳細的分析，以便闡明一些关于决定受迫振动特性的系統的物理性質。为了这一目的，在物理与技术中，常常应用复数振幅以及复数参数方法。

首先指出，复数量頗便于用来加(以及减)同一頻率的諧振动。其实，复数量 $Be^{i(pt+\varphi)}$ 可以用一个由坐标原点引出的向量来表示，这向量具有絕对値 B，幷随时間以角速度 p 圍繞原点旋轉。显然，在某一瞬間 t，这一向量在实軸上的射影为 $B\cos(pt+\varphi)$。因此 $B_1\cos(pt+\varphi_1)$ 及 $B_2\cos(pt+\varphi_2)$ 两个振动的和，便是 $B_1e^{i(pt+\varphi_1)}$ 及 $B_2e^{i(pt+\varphi_2)}$ 两个向量的和在实軸上的射影。因为这两向量以相

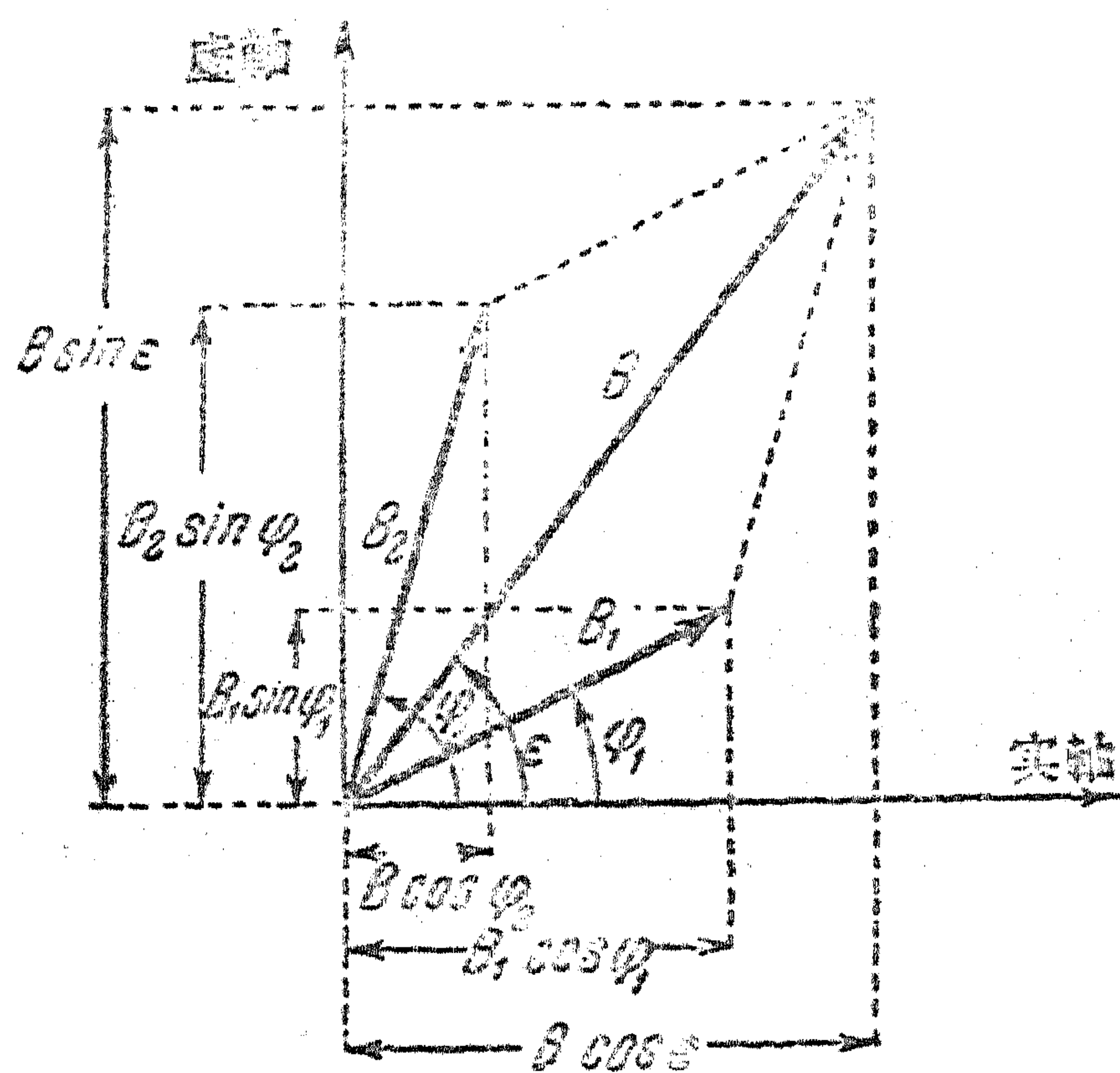


圖 52.

同的速度旋轉，所以它們之間的相对位置保持不变。因此，只要繪出向量在某一瞬間的位置，譬如在 $t=0$ 时（圖 52）的位置就够了。

圖 52 清楚地表明着一些不同的振动在振幅以及在相位之間的关系。如果 $\overline{X}_1=B_1e^{i\varphi_1}$，$\overline{X}_2=B_2e^{i\varphi_2}$，及 $\overline{X}=Be^{i\varepsilon}$，那末，显然有 $\overline{X}=\overline{X}_1+\overline{X}_2$；振幅以及相位之間的关系就这样簡單地写出来了。

如果用一般的形式表出，我們便有下列較繁的公式：

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2+2B_1B_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

以及
$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{B_1\sin\varphi_1+B_2\sin\varphi_2}{B_1\cos\varphi_1+B_2\cos\varphi_2}.$$

用这些公式来进行运算，很不簡便，当要加减很多数目的振动时，尤其如此。因此，如果像圖 52 那样，以适当的标尺繪出复数振幅来进行运算，便要簡單得多。这也部分地說明了为什么复数振幅方法应用得非常普遍。

根据定义，我們称 $\overline{X}=X_0e^{i\varphi}$ 一量为諧振动 $X_0\cos(pt+\varphi)$ 的复数振幅，式中的 X_0 是振幅，φ 是振动的相位。如果用 e^{ipt} 乘复数振幅，并取其实数（或者虛数）部分，那末，我們便得到該复数振幅所代表的諧振动。

因此，当加减很多个同一頻率的諧振动时，我們先用复数振幅来代替它們，然后和运算复数（量）一样，用圖解法或解析法来进行关于它們的全部运算，只是在最后的結果中才把复数振幅轉換为

諧振动。

在由諧外力激励的受迫振动中，所有参与該过程的量，都以同样的頻率，卽外力的頻率 p 变化着。如果 $\overline{X}$ 是位移的复数振幅，那末，$\dot{\overline{X}}$—速度的复数振幅——是：

$$\dot{\overline{X}}=ip\overline{X},$$

而加速度的复数振幅：

$$\ddot{\overline{X}}=ip\dot{\overline{X}}=-p^2\overline{X}.$$

由这里可以看出，速度的振动比位移的振动在相位上导前 $\frac{\pi}{2}$①；其振幅比位移的振幅大到 p 倍。加速度的振动与位移的振动反相位；其振幅比位移的振幅大到 p^2 倍。

由振动方程式可得到一些复数振幅之間的关系。例如对机械振动說，由下列基本方程式中

$$m\ddot{x}+h\dot{x}+kx=F_0\cos pt, \tag{14.8}$$

用 F_0e^{ipt} 代替 $F_0\cos pt$，并用 $\overline{X}e^{ipt}$ 代替 x 后，我們得到：

$$\overline{X}(-mp^2+iph+k)=F_0, \tag{14.9}$$

上列公式表明着力与位移的复数振幅之間的关系。

在进行这种研究时，通常都引用系統的复数参数。上式括弧內的复数量称为系統的复数(或者动)剛度，并用 $\overline{K}$ 来代表它。于是，等式(14.9)便可以写成：

$$\overline{X}\cdot\overline{K}=F_0\ 或\ \overline{X}=\frac{F_0}{\overline{K}}. \tag{14.10}$$

卽位移的复数振幅的大小 $\overline{X}$ 等于系統的动剛度 $\overline{K}$ 除力的振幅 F_0。

这样得到的复数振幅間的关系与靜量之間的关系很相似。如果以恒定力 F 作用于系統时，引起位移 x，那末，位移等于剛度除

① 这里必須記住：$i=\sqrt{-1}=e^{i\pi/2}$。

力：

$$x=\frac{F}{k}.$$

(14.10)与上式很相似，它不过是用上式中一些量的复数振幅来代替常数量，并用动剛度代替普通的剛度，而动剛度为：

$$\overline{K}=k-mp^2+iph=K_0e^{i\varphi}, \qquad (14.11)$$

$$K_0=\sqrt{(k-mp^2)^2+(hp)^2}, \qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{hp}{k-mp^2}.$$

將公式(14.10)及(14.11)加以研究时，立刻可以断言：位移的振动比力的振动在相位上滞后 φ 角；而位移的振幅等于 K_0 除力的振幅。因此，知道了系統的动剛度时，我們就会知道位移振动的大小，和位移的受迫振动和力之間的相位差。而动剛度則决定于頻率与系統的参数。

可以把由(14.8)到(14.9)的变換，認为是微分方程式的另一种表示形式，認为是符号算子的引用；可是复数参数的引用，对于振动物理学說，却有其特殊的意义。从受迫振动的观点看来①，复数量的引用，使得系統的振动特性有一个簡短和准确的描述。只是应該記住，这种方法仅仅对于綫性系統有意义。我們以后会講到，在非綫性系統中，还会有不同于外力頻率 p 的振动發生，因此，在非綫性系統中便不能用复数量来标明系統的物理性質。

可以把动剛度 $\overline{K}$ 表为三种剛度的和：質量的动剛度 $-mp^2$，彈簧的剛度 k 和摩擦的动剛度 ihp 三者的和。对于每一种剛度可以这样来理解：

有一力 $F_0\cos pt$ 作用于一与外界隔离 $(k=0, h=0)$ 的質量 m 上，那末很明显，x 的振动会与力的振动反相位，x 的振幅等于 $\frac{F_0}{mp^2}$。質量的动剛度將随着頻率的增高而加大，很明显，在高頻率

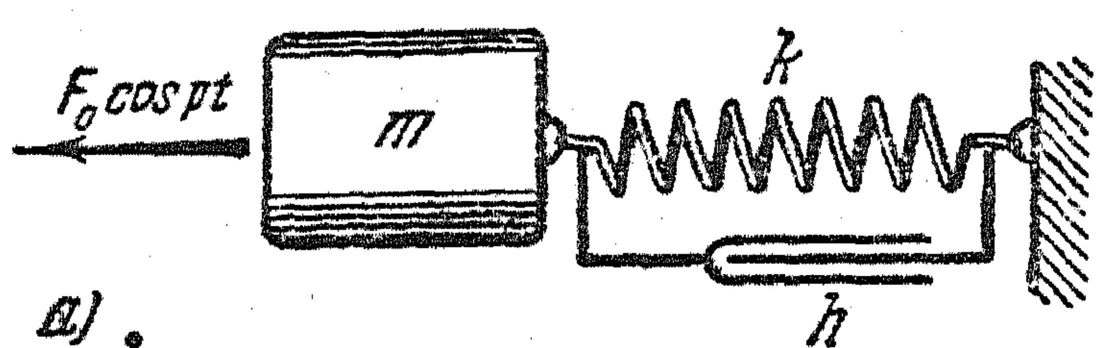
① 复数参数一般也可用在不稳定振动的情形。

时，具有有限大振幅的力，只能使質量产生極小的位移，"質量不善于傳遞高頻率"。

彈簧是系統的这种元件，对于它而言，靜剛度和动剛度是一样的幷都等于k。也就是彈簧的动剛度为定値，不依存于頻率。在物理上要实現这一理想情况，只有当彈簧的振动頻率不超过某个値，以致彈簧的質量和摩擦都可以忽略时，才能办到。

我們把綫性摩擦元件理解为一个决定着摩擦力 $h\dot{x}$ 的系統構成部分，它具有动剛度 iph。摩擦元件的动剛度为虛数的意义是，在摩擦力起决定性作用的系統 ($k=0, m=0$) 中，外力比位移的振动在相位上导前 90°。摩擦元件的动剛度的絕对値随着頻率的增高而加大；摩擦力的影响也随着頻率的增高而增加。

在圖 53, *a* 的机械振动系統中，元件 h 代表具有系数 h 的綫性摩擦元件。可以把这一系統簡要的繪成如圖 53, *б* 的形式。元件 A 只能沿水平移动；它受力 F_0 的作用幷由三个"彈性"元件"支持"着，这三个元件的剛度各注明于其上。可以把这一圖形正式的当作是一个靜系統，在这系統中，所有的"彈性"元件都幷联地"工作"。因此，在决定系統的剛度时，可將各个元件的剛度相加，也就是說公式(14.11)是正确的。



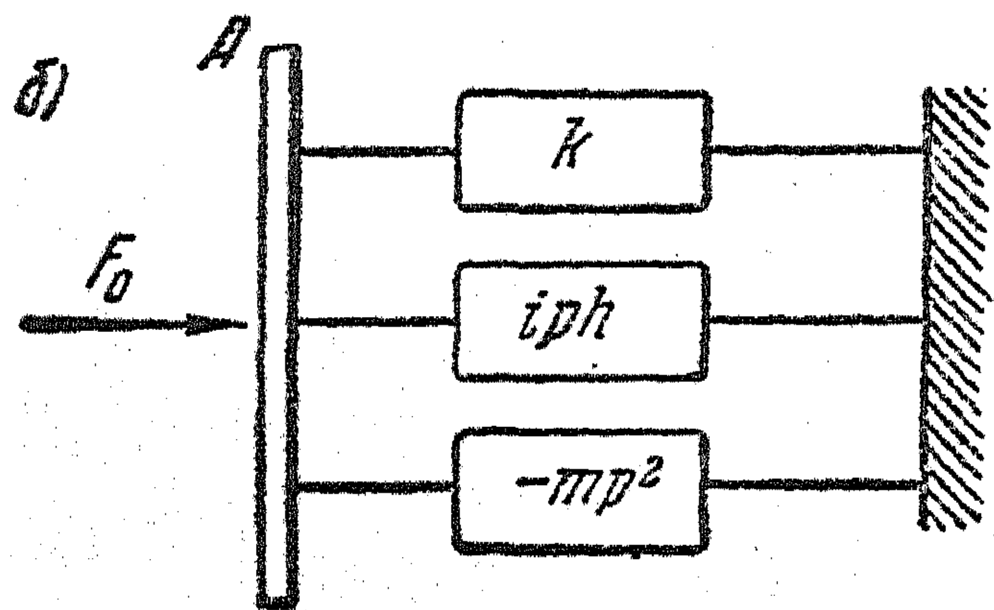


圖 53.

就是在比較复杂的情形中，也可以用振动系統的这种"靜"圖。

表达式(14.11)可以用圖解法来表示 (圖 54)：沿实軸列出 $k-mp^2$，沿虛軸列出 hp，$\overline{K}$ 便由对实軸轉动 φ 角的向量来表出。应該注意，所有各量的因次为[千克(重)/厘米]或[达/厘米]。

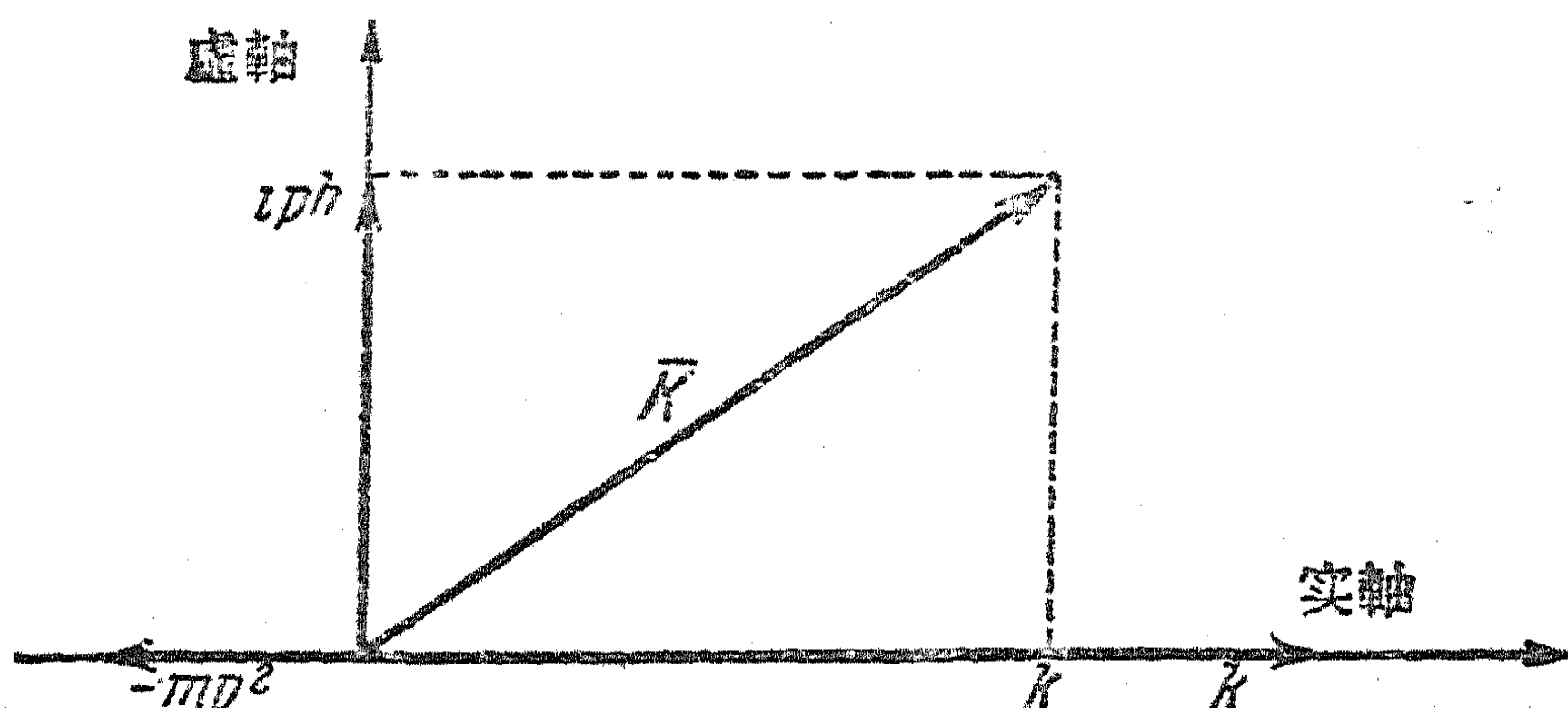


圖 54.

如果不取位移而取速度作为标明振动过程的变量，那末，速度的复数振幅 $\bar{\dot{X}}$ 与力的振幅之間的关系，將由另外一个称为复数摩擦系数(或者机械阻抗)的复数量来表出。

根据定义，复数摩擦系数 $\bar{H}$ 应該满足下列等式：

$$\bar{\dot{X}}\bar{H}=F_0. \qquad (14.12)$$

由这一等式不难建立复数摩擦系数与动剛度之間的关系。其实，$\bar{\dot{X}}=ip\bar{X}$，將它代入(14.12)后，就得到：

$$ip\bar{X}\bar{H}=F_0.$$

將上式与(14.10)相比时，我們得到：

$$\bar{H}=\frac{\bar{K}}{ip}. \qquad (14.13)$$

复数摩擦系数等于 ip 除动剛度。按照(14.11)，具一个自由度的机械振动系統的复数摩擦系数等于：

$$\bar{H}=h+i\left(mp-\frac{k}{p}\right). \qquad (14.14)$$

复数振幅方法和复数参数是电工学者主要为了計算交流电路而研究出的，并广泛应用于电工学及無綫电技术中。在电工学中，通常都引用电路的复数阻抗。在交流电路中，由复数阻抗所表出的电动势及电流的复数振幅的关系，和在直流电路中，由电阻所表出的电流强度与电动势的关系是一样的。在含有欧姆律电阻 R 的

电振动迴路中(圖 55),用电流 I 写出的电压方程式为:

$$L\dot{I}+RI+\frac{1}{C}\int Idt=\overline{\mathscr{E}}e^{ipt}.$$

假設电流等于 $\overline{I}e^{ipt}$,那末將这表达式代入上方程式后,便得:

$$\overline{I}\left(ipL+R+\frac{1}{ipC}\right)=\overline{\mathscr{E}}\ ; \qquad (14.15)$$

由上面得复数阻抗:

$$\frac{\overline{\mathscr{E}}}{\overline{I}}=R+i\left(pL-\frac{1}{pC}\right)=\overline{Z}=Z_0e^{i\varphi}. \qquad (14.16)$$

Z_0 一量具有阻抗的因次,在实用單位系統中,用欧姆来量度它。复数阻抗的絕对値 Z_0 給出电动势振动振幅与电流振动振幅兩者的比值;复数阻抗的幅角給出迴路中电动势的振动与电流的振动之間的相位差。为了便于計算起見,复数阻抗 $\overline{Z}$ 可以如圖 56 那样,用圖解表出。

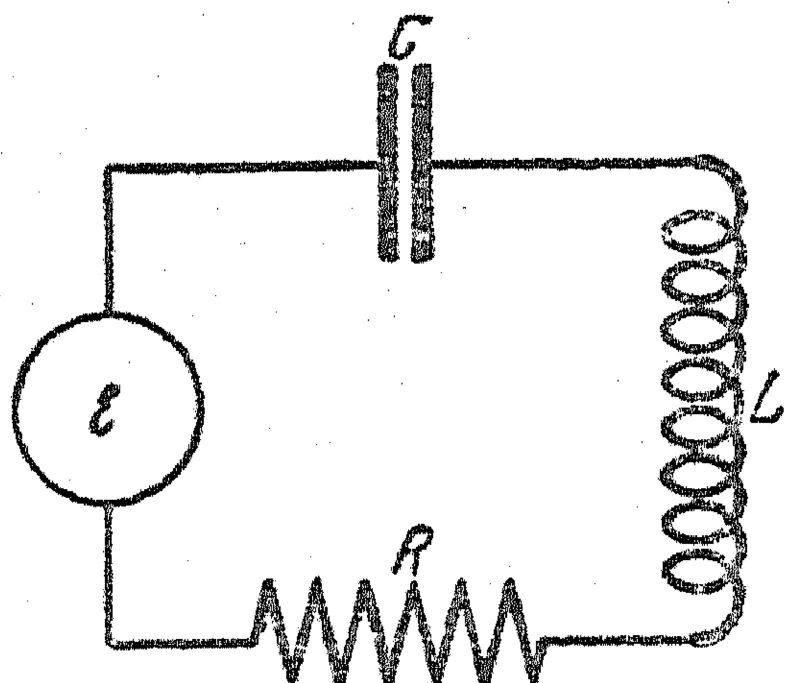


圖 55.

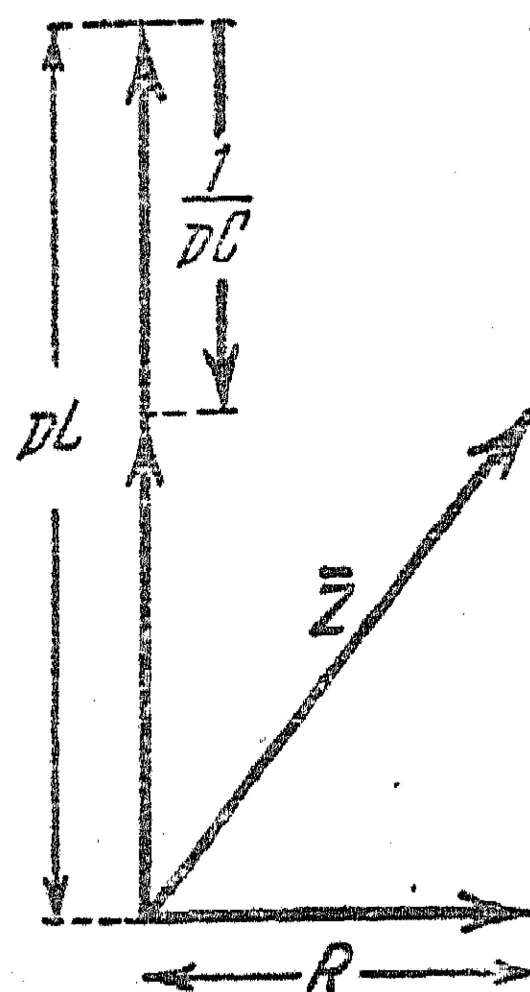


圖 56.

复数阻抗的絕对値为:

$$Z_0=\sqrt{R^2+\left(pL-\frac{1}{pC}\right)^2}, \qquad (14.17)$$

复数阻抗的幅角,或者(14.17)的相位差为:

$$\varphi=\operatorname{arcctg}\frac{R}{pL-\frac{1}{pC}}.$$

电路的复数阻抗的概念可以应用于任何电路。令一諧电动势作用于一复杂的电路中，則为了求得这一电动势的振幅，所必須用来与电流的复数振幅相乘的那一复数量，称为連于电源兩端的复数阻抗。我們馬上就要講到，在这种情形下，电路中將出現具有外电动势頻率的受迫振动的稳定狀态；流經电源的电流，是具有頻率 p 的諧振动电流。确定复杂电路的复数阻抗的方法將在以后研究。

§15. 共振規律的分析

求出在各种条件下受迫振动的相位与振幅，在实际中是很重要的；而振动的振幅是决定于頻率、外力的振幅和系統的参数。

在理論上，我們常把物理参数 R, L 及 C（以及与之对应的 h, m, k）認为是常数；在实际上，对于每一个給定的系統說，这一条件仅仅在一定的頻率范圍內可以实現。譬如力学中，在高頻率时，便不能忽略彈簧的質量，因为这时即令是微小的質量也会有很显著的影响；恰好和这一样，因为在高頻率时，質量并不像一个絕对剛体那样的运动着，它会产生形变，所以也不能忽略質量的彈性。在电学中，由于趋膚效应与輻射，电阻 R 依存于頻率①；在高頻率时，結綫的电感会表現出来等等。

只有熟悉了在分布参数系統中的振动以后，才能比較准确地确定理論应用的界限。然而在目前研究常数参数的时候，必須注意到当外来作用的頻率增高时，这种方案的局限性。

無論在固有振动的情况下，还是在受迫振动的情况下，系統的全部过程是由它的兩个参数来标明的。一个参数是固有頻率

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\sqrt{\frac{k}{m}},$$

① 在这种情形下，因为 R 与能量的損失成热联系着，故 R 不应該称为欧姆律电阻，有时称之为有效电阻。

另一个是減縮

$$\vartheta=\frac{\pi R}{L\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{L}{R^2C}-\frac{1}{4}}}=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{mk}{h^2}-\frac{1}{4}}},\tag{15.1}$$

当阻尼微小，即 $(R/2L)^2\ll 1/LC$ 时，減縮可以由下式計算：

$$\vartheta\approx\pi R\sqrt{\frac{C}{L}},\ \text{或}\ \vartheta\approx\frac{\pi h}{\sqrt{mk}}.\tag{15.2}$$

在受迫振动的理論中，常常不用減縮而用称为振动系統的"品質因数"的另一量 Q。根据定义，它等于

$$Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{\omega L}{R}=\frac{\sqrt{mk}}{h}=\frac{m\omega}{h}=\frac{\omega}{2\delta}.\tag{15.3}$$

品質因数和減縮一样，也是一个無因次的量，关于它物理意义將在以后說明。現在先將(15.3)代入(15.1)时，我們便得到了品質因数与減縮之間的关系。

$$\vartheta=\frac{\pi}{\sqrt{Q^2-\frac{1}{4}}}.\tag{15.4}$$

当系統的減縮微小时，品質因数乃是与減縮成反比的量。也就是：

$$\vartheta\approx\frac{\pi}{Q},\quad Q\approx\frac{\pi}{\vartheta}.\tag{15.5}$$

在比較大的減縮时，品質因数与減縮之間的关系由公式(15.4)来确定。显然，当 $Q=\frac{1}{2}$ 时，減縮为無穷大，而我們知道(§4)这种情况相当于振动狀态的边界，所以当 $Q<\frac{1}{2}$ 时，系統經冲击后。所产生的固有运动將是非振动的，有限的。

1. 电流(或速度)的振幅

当比較理論与实驗时，常常需要將理論与实驗的結果表示为無因次的形式。因此，假設外电动势的振幅保持恒定，仅仅將頻率

p 由 0 变到∞时，讓我們研究一下：在受迫振动的情况下，迴路中电流振幅与其最大振幅的比。

如果用 $\bar{I}=I_0e^{i\varphi}$ 代表电流的复数振幅，那末，由公式（14.15）求得的电流振动的振幅的值为：

$$I_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+\left(pL-\frac{1}{pC}\right)^2}}, \tag{15.6}$$

其中 $\mathscr{E}_0$ 是外电动势的振幅。不难确定，当 $p=\frac{1}{\sqrt{CL}}=\omega$ 时，电流 I_0 將是最大值。当外电动势的頻率等于系統的固有頻率时，电流的振幅为最大值，并决定于欧姆律电阻 R 除电动势的振幅 $\mathscr{E}_0$。用 v^2 来表示电流振幅的平方的比，这个比率代表受迫振动的总能量 $LI_0^2/2$ 与在共振时振动的最大能量 $LI_{0M}^2/2$ 的比值。根据公式（15.6）

$$v^2=\frac{I_0^2}{I_{0M}^2}=\frac{R^2}{R^2+\left(pL-\frac{1}{pC}\right)^2}. \tag{15.7}$$

用 $\frac{p}{\omega}=\gamma$ 及 $\frac{\omega L}{R}=Q$ 表示后，公式（15.7）的右边部分可写成無因次的形式：

$$v^2=\left(\frac{I_0}{I_{0M}}\right)^2=\frac{\gamma^2}{\gamma^2+Q^2(\gamma^2-1)^2}. \tag{15.8}$$

这一公式代表以無因次的形式表出了电流（或速度）的振幅平方的共振曲綫。在机械系統中，例如借助于（14.12），（14.13）以及（14.4），我們可以得到完全一样的关于速度（或能量）振动的振幅平方比的表达式。其中：

$$v^2=\left(\frac{\dot{X}_0}{\dot{X}_{0M}}\right)^2=\frac{m\dot{X}_0^2}{m\dot{X}_{0M}^2}. \tag{15.9}$$

对于不同的 Q 值,(15.8)的函数 v^2 的圖解如圖 57 所示。随着

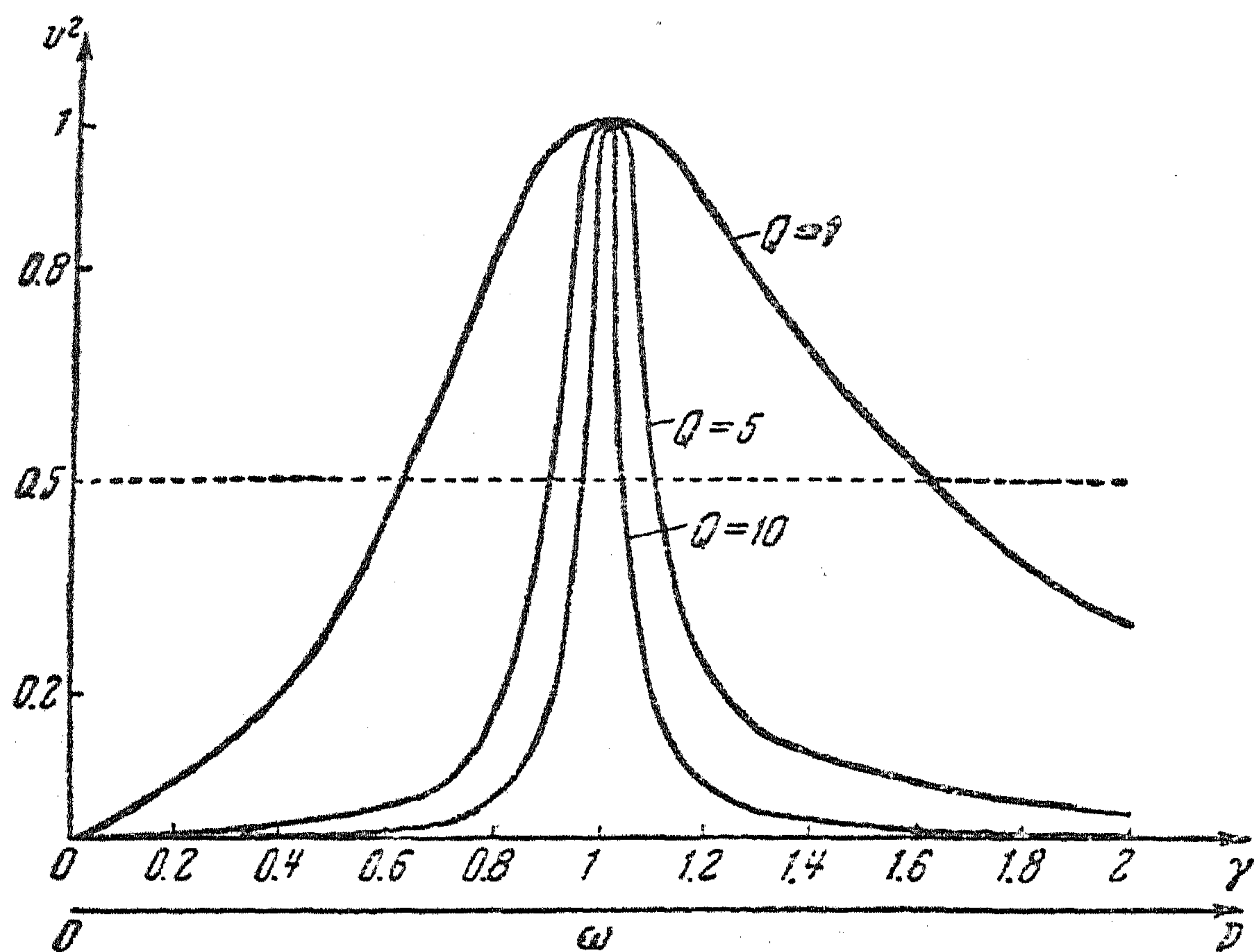


圖 57.

Q 的增加,在最大値附近,共振曲綫的銳度增大起来。当品質因数的値很大时,v^2 的値在远离共振的地方都很小,而在 $\gamma=1$ 的附近却急剧地增加到 1。与此相反,当 Q 很小时,共振曲綫的銳度变得微小。电流的振幅在相当大的一个区域內 ($\gamma=1$ 的附近) 变化不大。最大振幅仅仅由电动势的振幅以及迴路中欧姆律电阻的値来決定。但因为对一定迴路說,Q 与 R 成反比,所以电流的最大振幅与 Q 成正比。

如果与 (15.8) 式相对应的曲綫是根据实驗数据得到的話,这个曲綫便常常被用来确定品質因数。其实,对于一个給定値 γ_1,如果我們由实驗求得 v_1 的値,那末就可根据公式 (15.8) 求 Q。要确定 γ_1,还必須由实驗确定 ω 的値,也就是确定振幅为最大値时的頻率。現在讓我們举一个求对应于 $v_1^2=\dfrac{1}{2}$ 的 γ_1 値的例子。由公式(15.8)我們得到:

$$v_1^2=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\dfrac{Q^2}{\gamma_1^2}(\gamma_1^2-1)^2};$$

由此得：
$$Q=\pm\frac{\gamma}{\gamma_1^2-1};\tag{15.10}$$
上式中的符号要选擇得使 $Q>0$。

因此，当知道与 $v_1^2=\frac{1}{2}$ 相对应的 γ_1 的值时，(15.10) 式是用来确定 Q 的一个簡單公式。显然，在共振的兩边的兩个 γ_1 的值，都会使 v_1^2 等于 $\frac{1}{2}$(圖 57)。由公式(15.8)可以确信：在任何 $\gamma'=\frac{1}{\gamma}$ 的值时，v 的值是同样的。因此，如果直綫 $v^2=\frac{1}{2}$ 与共振曲綫相交于兩点 γ_1 及 γ_1'，那末，$\gamma_1'\gamma_1=1$。將它代入公式 (15.10)，我們得到：
$$Q=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_1'}\ .\tag{15.11}$$
这也就是說：系統的品質因数 Q 等于綫段 $\gamma_1-\gamma_1'$ 的倒数。$\gamma_1-\gamma_1'$ 称为共振曲綫的相对寬度。如果把对应于共振曲綫的相对寬度的兩个边界值 γ_1 和 γ_1'，用常用的以頻率为單位的 p_1 和 p_1' 来表示(圖 58)—p_1' 和 p_1 的差称为共振曲綫的寬度，那末，确定品質因数 Q 的(15.11)式，便可以写为：
$$Q=\frac{\omega}{p_1-p_1'}\ ,\tag{15.12}$$
因此，系統的品質因数等于用共振曲綫的寬度除固有頻率。

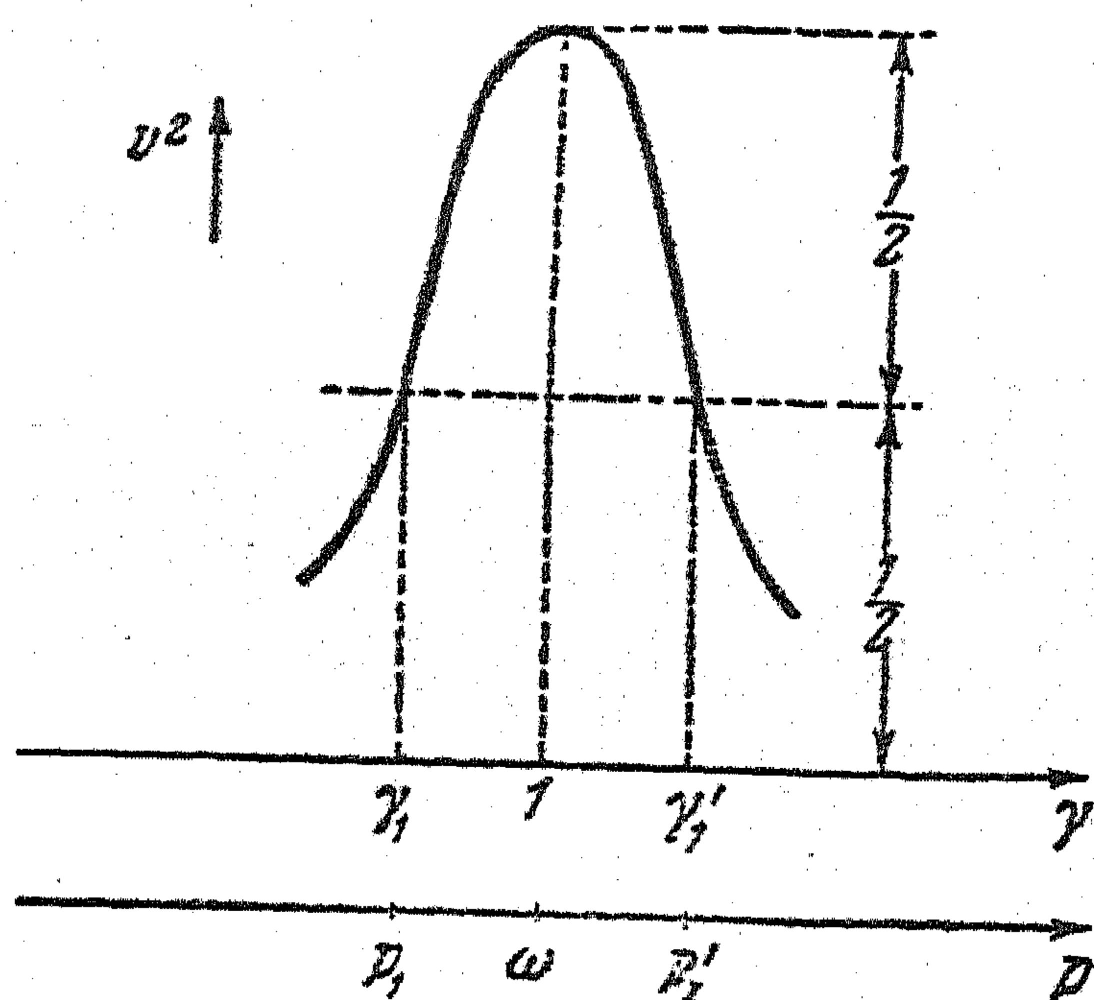


圖 58.

共振曲綫的寬度是衡量振动迴路(或者振动系統)选擇性的一种尺度，它指出了这样一个頻率范圍，即在同样的电动势振幅下，以这些頻率振动时，受迫振动能量大于共振时振动能量的 50%。公式 (15.11) 以及 (15.12) 表明着共振曲綫的寬度和 Q 的关系，因此，系統的

选擇性的高低可以由系統的 Q 値来鑒定。当 Q 的値較大时，可以大致認为圖 57 的共振曲綫，在 v^2 的値由 1 到 1/2 的范圍内，对共振是对称的。在这种情况下，当頻率由共振向任何一边的歧离是共振曲綫寬度的一半时，受迫振动的能量將大約等于在共振时振动能量的 50%。

例如，令 $Q=100$，这就是說：如果外电动势頻率与諧振頻率之差小于 0.5%，那末系統中的振动能量便大于共振时能量的一半。电迴路的 Q，假如不采取特别的办法来提高它，通常为 10 至 50。音叉(以及一般机械系統)具有高得多的品質因数，$Q\approx3000$，这就表示：只要与系統的固有頻率相差約 0.06%，受迫振动的能量便会减少一半以上。

2. 位移的振幅(或在电容器上电荷的振幅)

由公式(14.9)及(14.11)，我們可以求得在机械振动系統中位移的受迫振动的振幅：

$$X_0=\frac{F_0}{\sqrt{(k-mp^2)^2+(hp)^2}};\qquad(15.13)$$

將右边分式的分子分母各除以 k，并引用普通的表示符号，我們得到：

$$X_0=\frac{a}{\sqrt{(1+\gamma^2)^2+\frac{\gamma^2}{Q^2}}},\qquad(15.14)$$

和以前在(12.1)曾应用过的一样，其中 $a=\frac{F_0}{k}$ 为"靜位移"。

在电容器上电压振动的复数振幅 $\overline{V}$ 与迴路中电流的复数振幅 $\overline{I}$ 之間的关系由等式：$\overline{V}=\frac{\overline{I}}{ipC}$ 表出，而这等式是由 $V=\int\frac{Idt}{C}$ 得出的，因此，对于諧振动的振幅便有下列等式

$$V_0=\frac{I_0}{pC}.\qquad(15.15)$$

以(15.6)中的 I_0 代入上式并引用一般的表示符号时，便得到在电容器上电压的振幅：

$$V_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+\frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \tag{15.16}$$

电容器上电荷的复数振幅 $\bar{q}$，仅仅与电压振幅 $\bar{V}$ 相差一个常数乘数 C（电容器的电容量）。

显然，还可以把公式(15.14)及(15.16)改写为下列無因次的形式：

$$u=\frac{X_0}{a}=\frac{V_0}{\mathscr{E}_0}=\frac{q_0}{\mathscr{E}_0 C_0}=\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+\frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \tag{15.17}$$

公式(15.17)以無因次的形式表出了关于位移以及电容器上电压的振动振幅。与不同 Q 値对应的 u 的曲綫族如圖59所示。

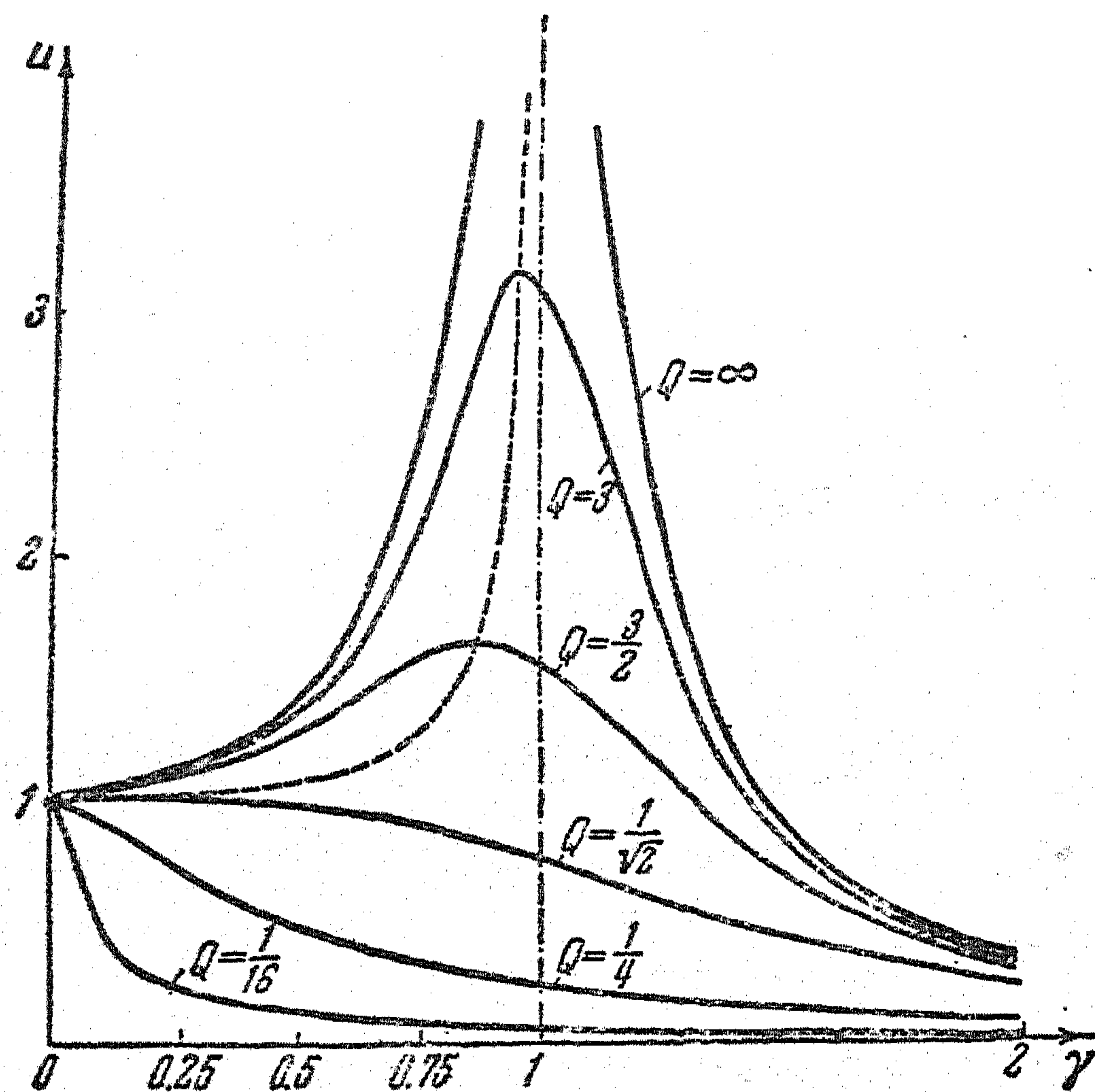


圖 59.

当 Q 足够大并且为定値时，随着 γ 增加到 $\gamma=1$ 的附近，振幅

的值急剧地增加。这种振幅的增加也称为共振。

在圖 59 上，所有的曲綫都从 $u=1$ 开始。这就是說：当頻率微小时，無論 Q 为何值，位移振动的振幅都等于静位移；或者無論 Q 为何值，电容器上的电压都等于电动势。当 Q 的值很大时，随着 γ 值的增加，u 的值增加得特别快，当 γ 趋近于 $\gamma=1$ 时，在某个小于 1 的 γ_0 值，u 达到最大值，然后逐漸減小，当 $\gamma\to\infty$ 时，u 減小到零。如果 $Q_1>Q_2$，那末，与 Q_1 对应的曲綫整个位于与 Q_2 对应的曲綫之上。我們記得，当品質因数的值很大时($Q\gg1$)，Q 和減縮成反比。

由公式(15.17)可以看出，在 $\gamma=1$ 的共振情况下，u 的值与 Q 相等。也可以把这当作品質因数的定义。例如，当共振时电容器上电压的振幅与外电动势的振幅的比称为迴路的品質因数。就根据这一原理，制造了測定 Q 的仪器。

然而这里必須先肯定什么叫做共振。还是認为当外力的頻率与無阻尼系統的固有頻率相等($\gamma=1$)时發生共振呢？还是認为在这样的 γ_0 值，即当位移振动的振幅达到最大值时發生共振？在(15.8)这种电流振幅的共振曲綫的情形下，当 $\gamma_0=1$ 时出現电流振幅的最大值；而在位移振幅的共振曲綫的情形下，便不是这样；其实，微分(15.17)的分母时，我們求得当

$$\gamma_0=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \tag{15.18}$$

时，分母为最小值，因此，只有 Q 的值很大时，才有 $\gamma_0\to1$。

將(15.18)代入(15.17)后，我們得到 u 的最大值：

$$u_{\text{макс}}=\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}. \tag{15.19}$$

由(15.18)及(15.19)中看出，当 Q 很大时，u 的最大值接近于 Q，而

γ_0接近于1。因此，当Q的值很大时，兩种共振頻率的定义之間，实际上并沒有什么显著的差别。

当Q的值微小时，共振頻率的不同的定义提供不同的值。因此，对于定义而言，我們商定把$\gamma=1$的情形，称为共振，也就是，共振發生在外力頻率与(沒有阻尼的)系統的固有頻率重合时。但要記住，当共振时，电流(或者速度)的受迫振动的振幅为最大值；而电容器上电压(电容器上的电荷，位移)的受迫振动的振幅，將根本不是最大值，仅仅当Q的值很大时，在共振时，振幅才接近于最大值。

由(15.18)中可以看出，随着品質因数Q的减小，位移振幅的最大值移向$\gamma=0$。当$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx0.7$时，振幅在頻率为0时，即$\gamma_0=0$时最大，且$u_{\text{макс}}=1$。这时系統中的摩擦將如此之大，以致無論頻率为何值，位移振动的振幅都小于静位移。当$Q<\frac{1}{\sqrt{2}}$时，曲綫u的路徑还在下面一些(圖59)。

我們要記着，根据(15.3)

$$Q=\frac{\omega}{2\delta}.$$

当$\omega=\delta$时，固有振动轉变为非振动过程，轉变为有限运动。因此，$Q=1/2$的值，也和对应于它的阻尼一样(§4)，称为临界值。

3. 加速度的振幅(或在电感量上的电压的振幅)

在振动理論的实际应用中，加速度振幅的共振曲綫遇得比較少。然而，对于某些問題說，这种曲綫是十分重要的。

加速度的复数振幅为$\overline{\ddot{X}}=-p^2\overline{X}$，或$\ddot{X}_0=-p^2X_0$，因此，根据公式(15.14)，不难得到关于决定加速度振幅的共振曲綫所需的公式；在电感量上电压的复数振幅为$\overline{V_L}=ipL\overline{I}$或者$V_{L0}=pLI_0$；利用这个关系并根据(15.6)，我們可求得在电感量上电压振幅的

共振曲綫；因此，加速度的共振曲綫，在無因次的形式下，可由下式表示：

$$W=\frac{\ddot{X}_0}{\frac{F_0}{m}}=\frac{V_{L0}}{\mathscr{E}_0}=\frac{Q\gamma^2}{\sqrt{\gamma^2+Q^2(\gamma^2-1)^2}}. \qquad (15.20)$$

W 的圖形如圖 60。

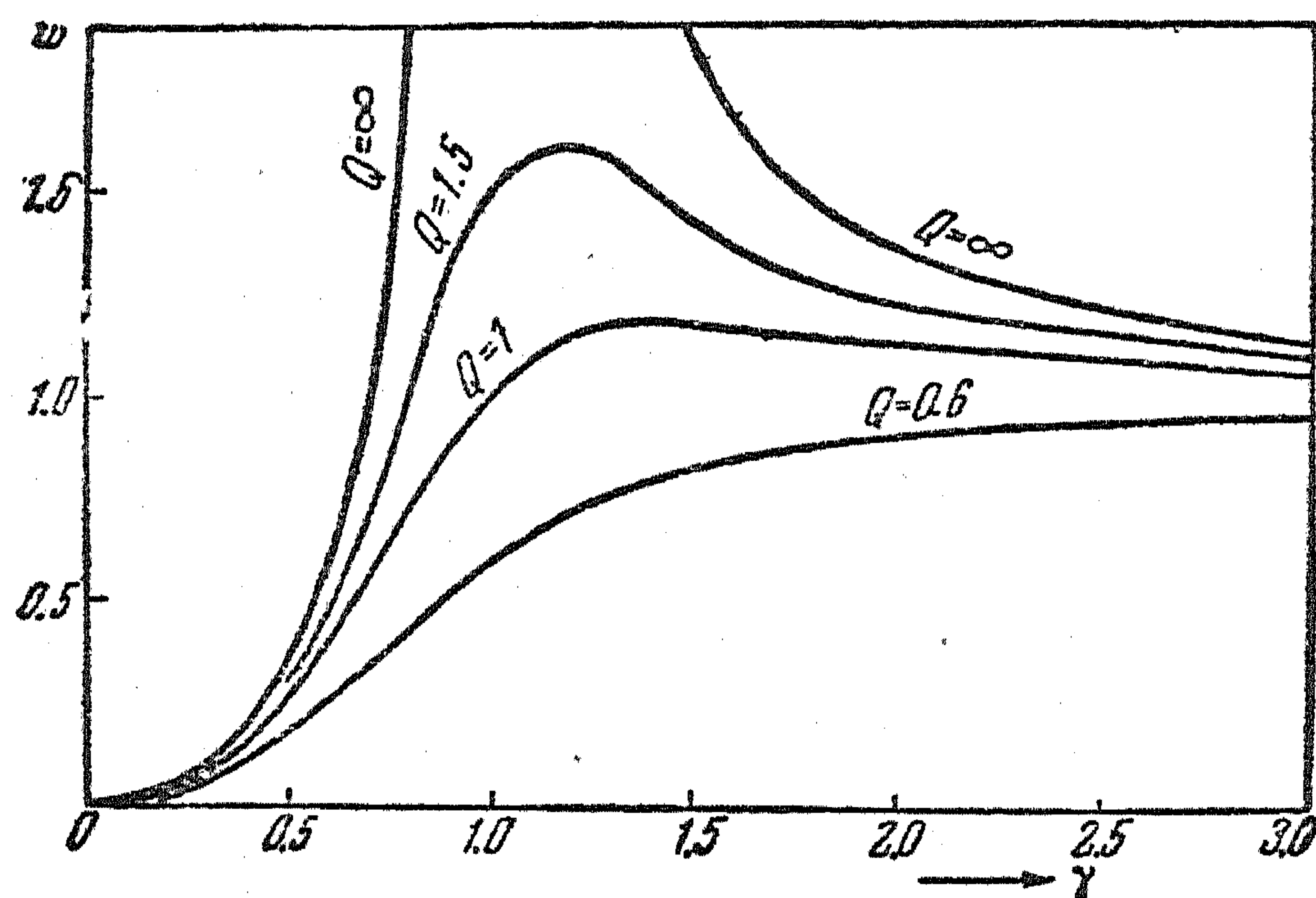


圖 60.

共振曲綫具有完全另外一种形式：当 $\gamma=0$ 时，$W=0$；当 $\gamma=1$ (共振)时，$W=Q$①；当某个 $\gamma_0>1$ 的値时，振幅到达最大値；然后随着 γ 的增加，振幅下降；当 $\gamma\to\infty$ 时，振幅趋近于 1。由公式(15.20)不难求得其最大値，并可断定，在品質因数 Q 的値很大的情况下，最大値發生在 $\gamma\approx1$ 时。由初等物理学的論据可以看出，当高頻率时，在电感量上电压振动的振幅將等于外电动势的振幅，这时全部电压都降在电感量上。

在振动迴路中，电流振幅是可以測定的；如果电容器中的損耗很小，电容器上电压的振幅也可以測定；但电感量上电压的振幅实际上則不能測得，这是由于無法把綫圈的欧姆律电阻和綫圈的电

① 与位移的共振曲綫一样。

感量分开的原故，通常繞制綫圈所用导体的电阻是迴路的欧姆律电阻的主要部分。

在机械系統中，多半是記录位移的振幅，有时(例如在电磁記录中)也記录振动速度的振幅。为了确定作用于正在振动的質量部分的慣性力，知道加速度的振幅也是十分重要的，但却很少直接来記录它。

4. 受迫振动的相位

說到相位时，所指的应該至少是兩个同频率的振动，并且也只討論关于它們之間的恒定相位差。当有几个同頻率的諧振动存在时，那末，可以把某个振动的相位当作是起始相位，并相对于这一起始相位来考虑所有振动的相位。直到現在，我們曾經把外力的相位認为是起始相位，因此曾令它等于零(也可以不这样作)。

力的与位移的振动之間的相位差可以由(14.6)来决定。令力比位移导前角 φ，于是引用我們所曾用过的無因次的量 Q 及 γ，便可以把这相位差写成:

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{Q(1-\gamma^2)}. \tag{15.21}$$

φ 依存于 γ 的圖形如圖 61a。

对于 $Q\to\infty$(沒有阻尼)的情形，当 $\gamma=1$ 时，發生大小为 π 的相位突变。当 Q 很大时，相位的变化主要發生在共振的附近，即 $\gamma=1$ 的附近。当共振即 $\gamma=1$ 时，(对于所有的 Q) $\varphi=\frac{\pi}{2}$，力与位移之間的相位差为 90°。位移在相位上滯后于力 $\pi/2$①。电容器上的电压的振动(或者电容器上的电荷 q)所滯后于外电动势的相位也是这个大小 φ。

其余各量(电流，速度等等)的相位差，不难由这种方法得到，即由公式(15.21)加或减 $\pi/2$，使其符合于下列复数振幅的公式:

① 我們指出，可以把力与位移的相位差为 90° 时的頻率認为是共振頻率。

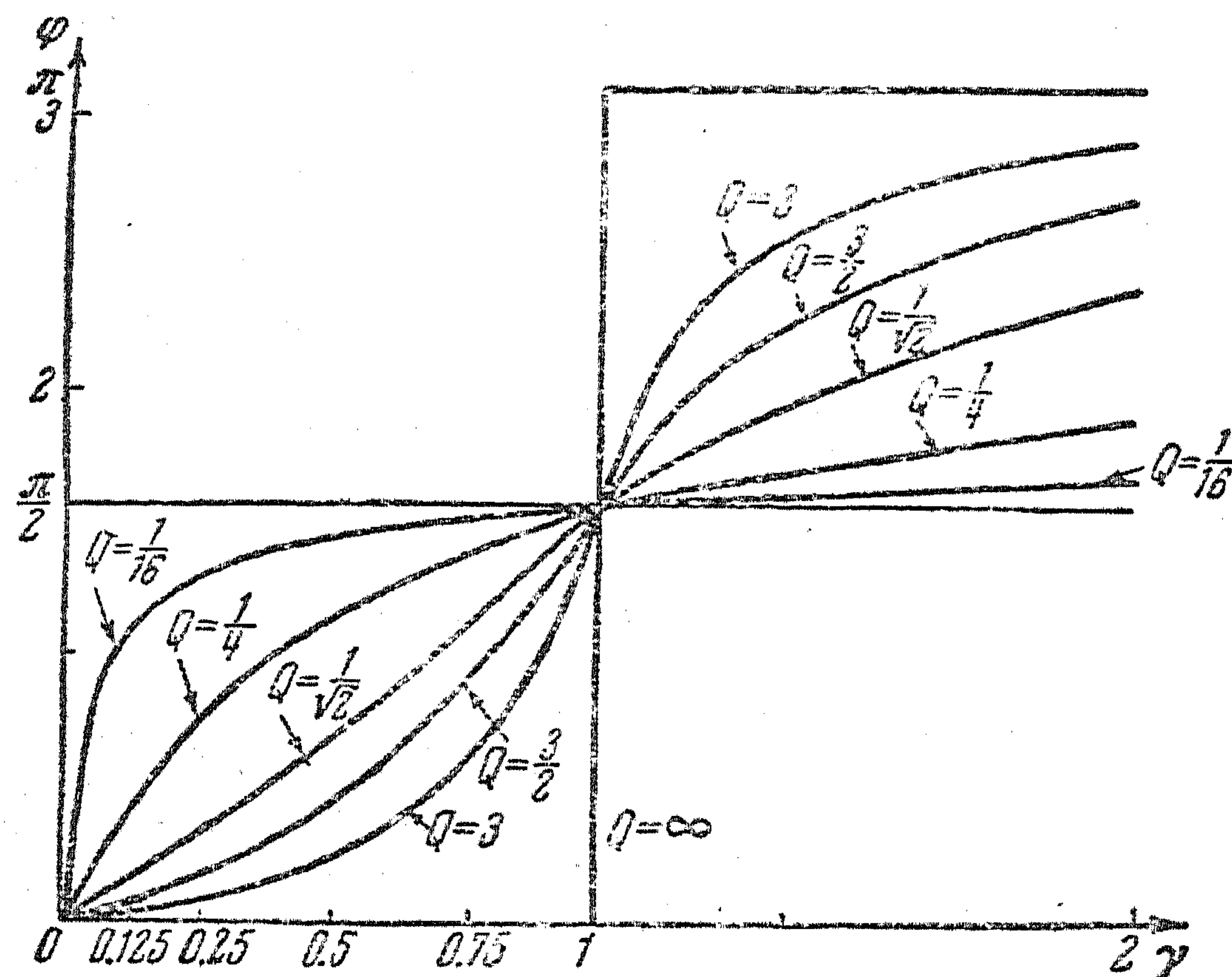


圖 61a.

$$\overline{\dot{X}}=ip\overline{X},\quad \overline{\ddot{X}}=ip\overline{\dot{X}}=-p^2\overline{X},\tag{15.22}$$

或 $$\overline{I}=\overline{\dot{q}}=ip\overline{q},\quad \overline{V}_C=\frac{\overline{I}}{ipC}=\frac{\overline{q}}{C},\quad \overline{V}_L=ipL\overline{I}=-p^2L\overline{q}.\tag{15.23}$$

由这里推出結論：速度导前于外力的相角为 $\frac{\pi}{2}-\varphi$，加速度导前于外力的相角为 $\pi-\varphi$。电流导前于电动势的相角为 $\frac{\pi}{2}-\varphi$，当共振时($\gamma=1$)，电流(速度)与外电动势(外力)同相位。电感量上的电压的振动比綫圈中电流的振动导前 $\pi/2$，而电容器上电压比电流振动滯后 $\pi/2$。

§. 16 在系統參数变动的情况下共振曲綫的特性

我們在外力頻率是变动的而系統參数保持恒定的假設下，曾經分析过关于受迫振动的相位和振幅的共振曲綫。事实上，在許多实际的应用中，常常研究在外力頻率是恒定的，而系統的某一个

参数（例如剛度或者电容量）是变动的情况下所得到的共振曲綫。应該注意的是，在这种情形下共振的依存关系，与我們曾研究过的共振的依存关系的区别在于：这里不仅固有頻率与外力頻率的比变化着，振动系統的構造也变动着，譬如系統的品質因数 Q 就不是常数。严格說来，在这种情形下，一根共振曲綫代表一連串不同振动系統的振动。

讓我們指出。关于这种共振依存关系的一些重大特点，这些特点是由分析基本公式(15.6)和(15.13)得出的。首先注意的，是仅仅当变化剛度（电容量）参数以及質量（电感量）参数时，才会在系統中观察到共振現象，这些参数称为振动系統的基本参数。

由公式((15.13)可以看到，無論变化什么基本参数，当 $k=mp^2$ 时，便会發生共振，位移振动的最大振幅將等于：

$$X_{0M}=\frac{F_0}{hp}. \tag{16.1}$$

零脚标系表示可变参数的共振值以及恒定参数的値，于是，下式

$$m_0p^2=k_0 \tag{16.2}$$

可以理解为共振的条件。在这种情形下，共振出現于外力頻率和無阻尼系統的固有頻率恰好重合时；而在前面的情形中，这兩个頻率仅仅是近似地重合。

和前面一样，讓我們在無因次的形式下，来研究共振的依存关系：用 y 来代表位移振动的振幅对它的共振値的比，那末，由(15.13)及(16.1)推得：

$$y^2=\frac{X_0^2}{X_{0M}^2}=\frac{h^2p^2}{(k-m_0p^2)+h^2p^2}. \tag{16.3}$$

当可变剛度时，用 x 代表 $\frac{k}{k_0}$（或者在可变質量时，用 x 代表 m/m_0），并引用在共振时系統的品質因数：

$$Q_0=\sqrt{\frac{m_0k_0}{h}}=\frac{k_0}{hp}=\frac{m_0p}{h};\qquad(16.4)$$

那末,位移振幅的平方的共振曲綫的公式(16.3),在無因次的形式下,將是:

$$y^2=\frac{1}{(1-x)^2Q_0^2+1}.\qquad(16.5)$$

与(16.5)相对应的共振曲綫如圖 61,б。

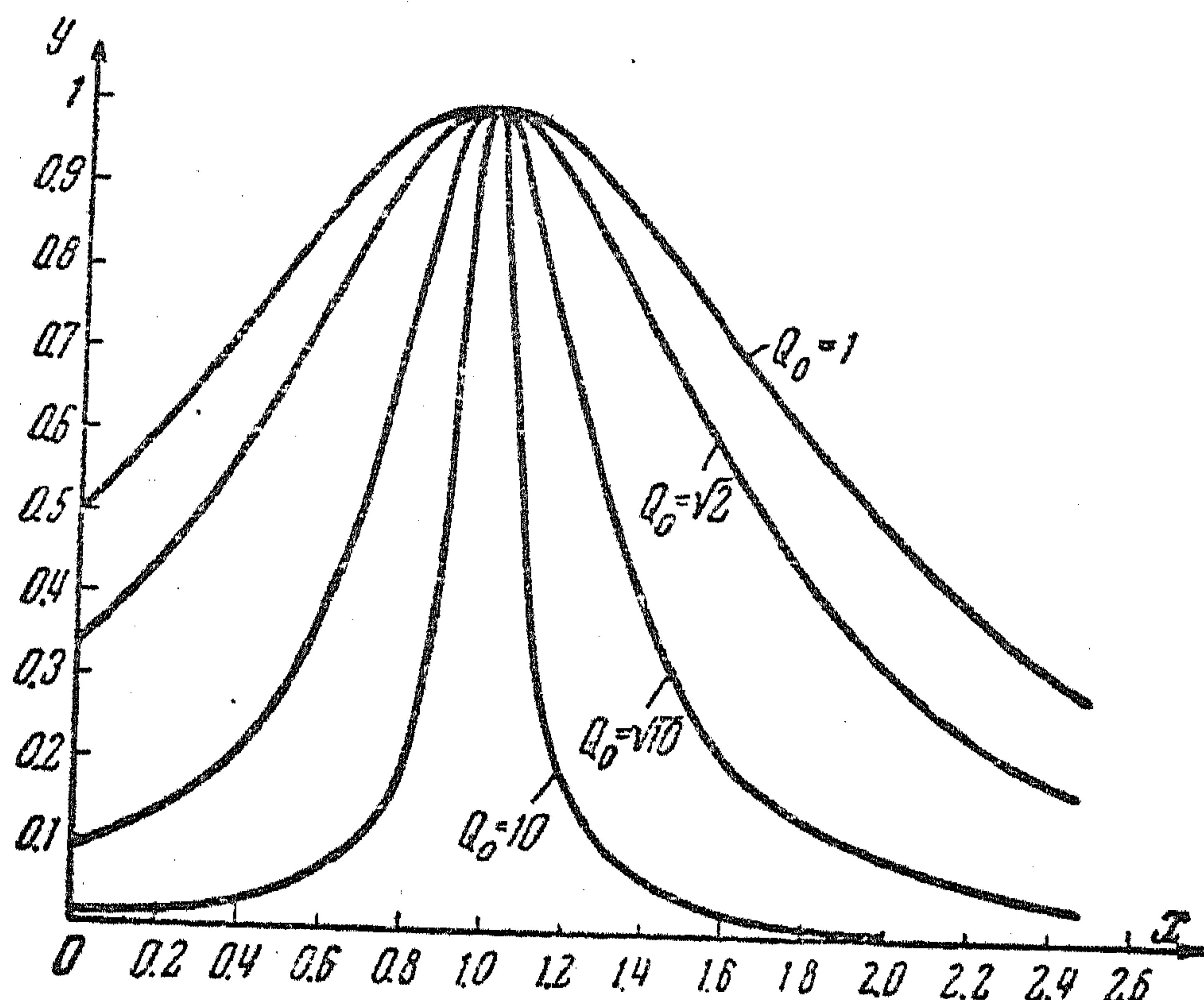


圖 61 б.

我們注意到,在这种情形下,共振曲綫对于共振点完全对称。

尽管系統的品質因数也沿着共振曲綫变动着,但共振时的品質因数 Q_0 却是共振曲綫的一个参数,它决定着共振曲綫的特性。在这里,共振曲綫的寬度与品質因数之間也具有簡單的关系。

因为曲綫是对称的,所以就可以把可变参数的这种变化值 $\Delta x=\dfrac{\Delta k}{k_0}\left(\text{或 } \Delta x=\dfrac{\Delta m}{m_0}\right)$ 称为是共振曲綫的半个相对寬度,在这种 Δx 时,振动的能量(振幅的平方)减少到共振能量的二分之一,因此,由(16.5)可以推出决定 Δx 的方程式。

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{(\Delta x)^2Q_0^2+1};$$

由此，
$$Q_0=\frac{1}{\Delta x}, \tag{16.6}$$

也就是，在共振时系統的品質因数，等于振幅平方的共振曲綫的半个相对寬度的倒数。它与变化頻率时的共振曲綫不同，后者的品質因数是振幅平方的共振曲綫的相对寬度的倒数。

当决定(16.5)这种共振曲綫时，振动的頻率保持恒定，因此，位移振幅的比將等于速度振幅的比以及加速度振幅的比，就是：

$$y=\frac{X_0}{X_{0M}}=\frac{pX_0}{pX_{0M}}=\frac{\dot{X}_0}{\dot{X}_{0M}}=\frac{\ddot{X}_0}{\ddot{X}_{0M}}.$$

由上式可以推出，在系統参数可变的情况下共振依存关系的重要特点——位移、速度和加速度的振幅的共振曲綫具有同样的形狀。这与我們曾見过的，当外力的頻率可变时的情形是不相同的。

对于电迴路說，由(15.6)可以得到代表电流振幅的平方比的共振曲綫，它是：

$$\left(\frac{I_0}{I_{0M}}\right)^2=\frac{R^2}{R^2+\left(\frac{1}{pC}-pL\right)^2}. \tag{16.7}$$

如果当电容量可变时，用 x 代表 $\frac{C_0}{C}$，当电感量可变时，用 x 代表 $\frac{L}{L_0}$，其中的零脚标的意义和前面的相同。那末，和机械系統中的情形下一样，对于电迴路中电流振幅的比

$$y=\frac{I_0}{I_{0M}}$$

而言，也有公式(16.5)和圖61б所示的共振曲綫。共振条件現在可以写成：

$$p^2L_0C_0=1,$$

在共振时，迴路的品質因数为

$$Q_0=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}=\frac{L_0p}{R}=\frac{1}{pC_0R},$$

它和共振曲綫的寬度之間的关系仍由(16.6)来表出。

显然，由于振动頻率保持恒定，电容器上电荷的振动振幅$\frac{I_0}{p}$的共振曲綫，就是圖 61 б。

在电感量可变的情形下，电容器上电压振动的振幅等于$\frac{I_0}{pC_0}$；而在电容量可变的情形下，电感量上电压振动的振幅等于I_0pL_0，由于这些振幅与电流振动的振幅成正比，所以这些电压振幅的共振曲綫和由公式(16.5)所得到的曲綫，具有同样的形狀。在电容量可变的情形下，电容器上电压振动的振幅，以及当电感量可变时，电感量上的电压振动的振幅，都不和电流的振幅成正比。因此，这些振幅的共振曲綫会是另一种形狀，这不难由公式(15.6)求得。在这里，最大振幅不恰好發生在共振时，但当Q_0的値很大时，最大振幅在接近共振时發生。因为無法將綫圈的电感量与它的欧姆律电阻分开，因此，在实际上，不会碰到电感量上电压振动的振幅的共振曲綫。

代表位移振动和力振动之間相位差如何随着系統基本参数变化的曲綫，具有另一种形狀，它并不对共振对称。在剛度$x=\frac{k}{k_0}$可变的情形下，利用(16.2)及(16.4)的关系式，可以由(15.21)求得这

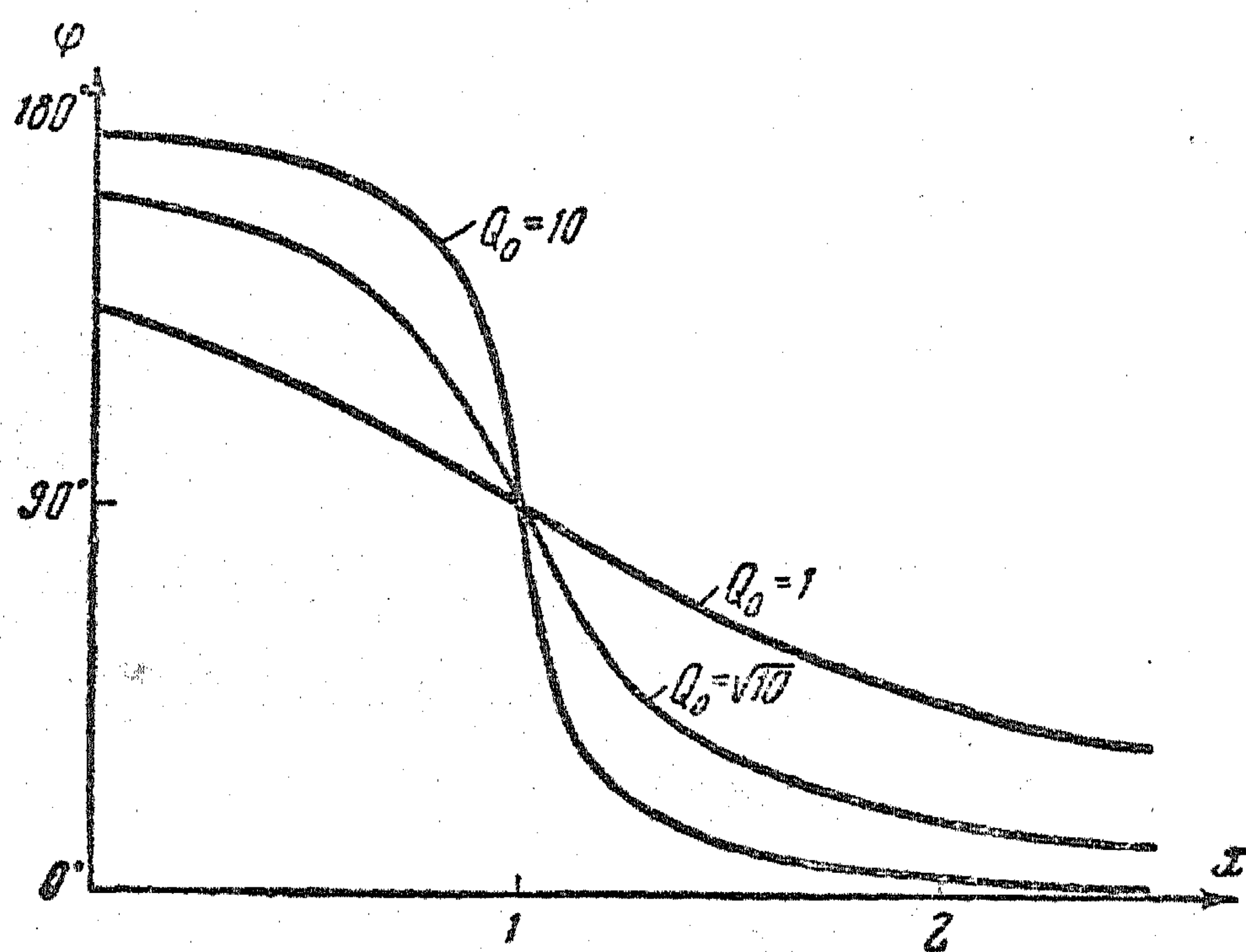


圖 61в。

曲綫的方程式如下:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{Q_0(x-1)}. \tag{16.8}$$

当品質因数为不同的値时，相位差与 x 之間的依存关系如圖 61в 所示。

§17. 某些特殊的共振情形
(“电流”共振与“电压”共振)

把外来作用加于振动系統上的方法是可能不同的。在电工学与無綫电技术中，有兩种連接电动势的情形具有重大的意义，这兩种連接通常称为电动势与振动迴路的串联以及电动势与振动迴路的并联。

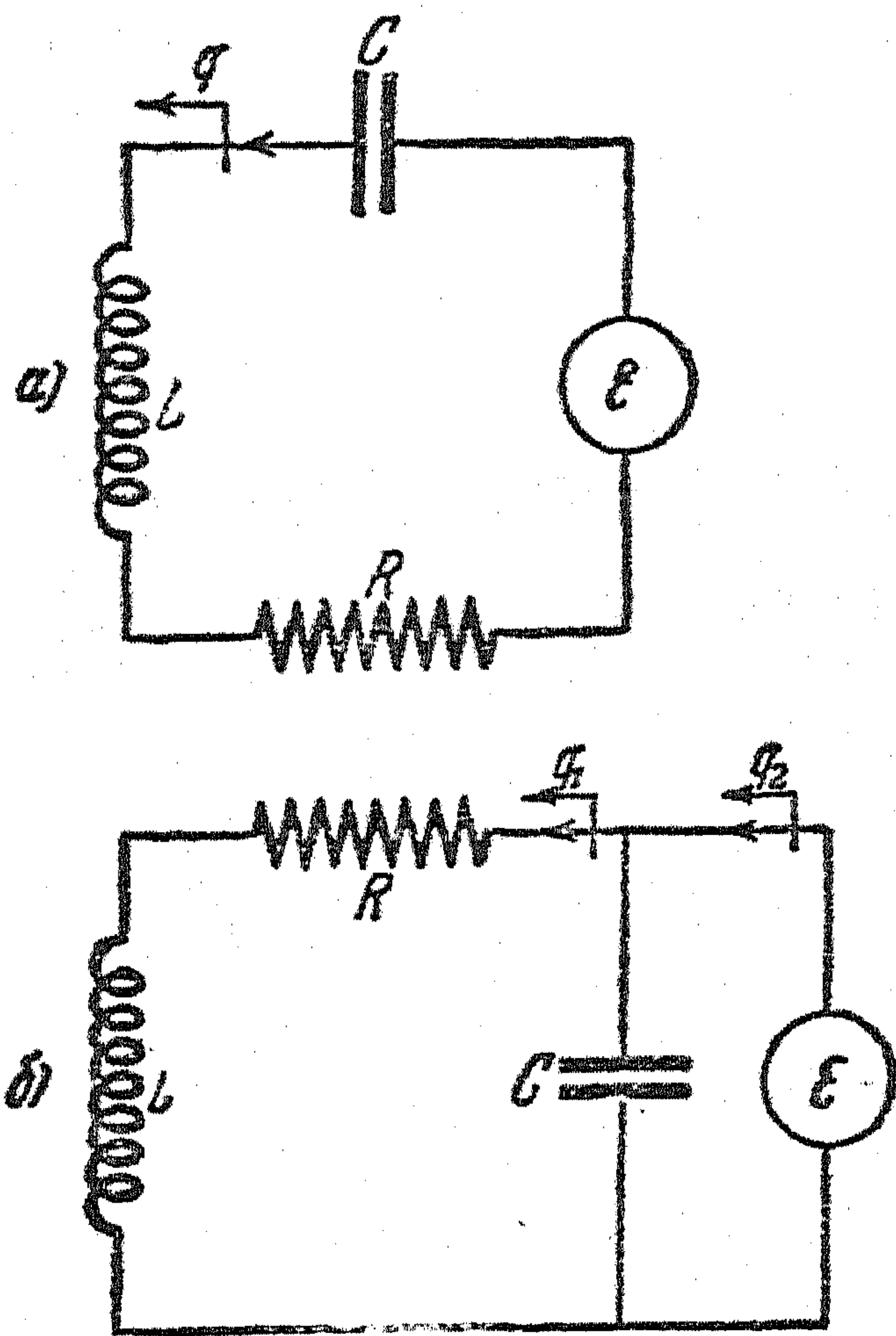


圖 62.

到現在止，我們研究过电源电动势与迴路串联的情形(圖 62,a)，但也可以將外电动势与迴路并联(圖 62,$б$)。严格說来，后一种綫路代表一具有兩个自由度的系統。但和具有一个自由度的系統一样，在这种系統中，也会發生受迫振动。

値得先研究一下这些电路的机械类似。第一个电路的类似(圖 63,a)我們很熟悉，它是外力作用于一悬在彈簧上的質量 m 上，这彈簧具有剛度 k 及摩擦系数 h。

第二个电路的类似如圖 63,$б$ 所示，外力 F 通过具有剛度 k 的彈簧，作用于質量 m 上，当运动时，質量产生具有系数 h 的摩擦

力。

令 x_1 及 x_2 各为由質量的平衡位置以及彈簧一端的位移(圖 63, б),那末,具質量 m 的物体的运动方程式可以写为:

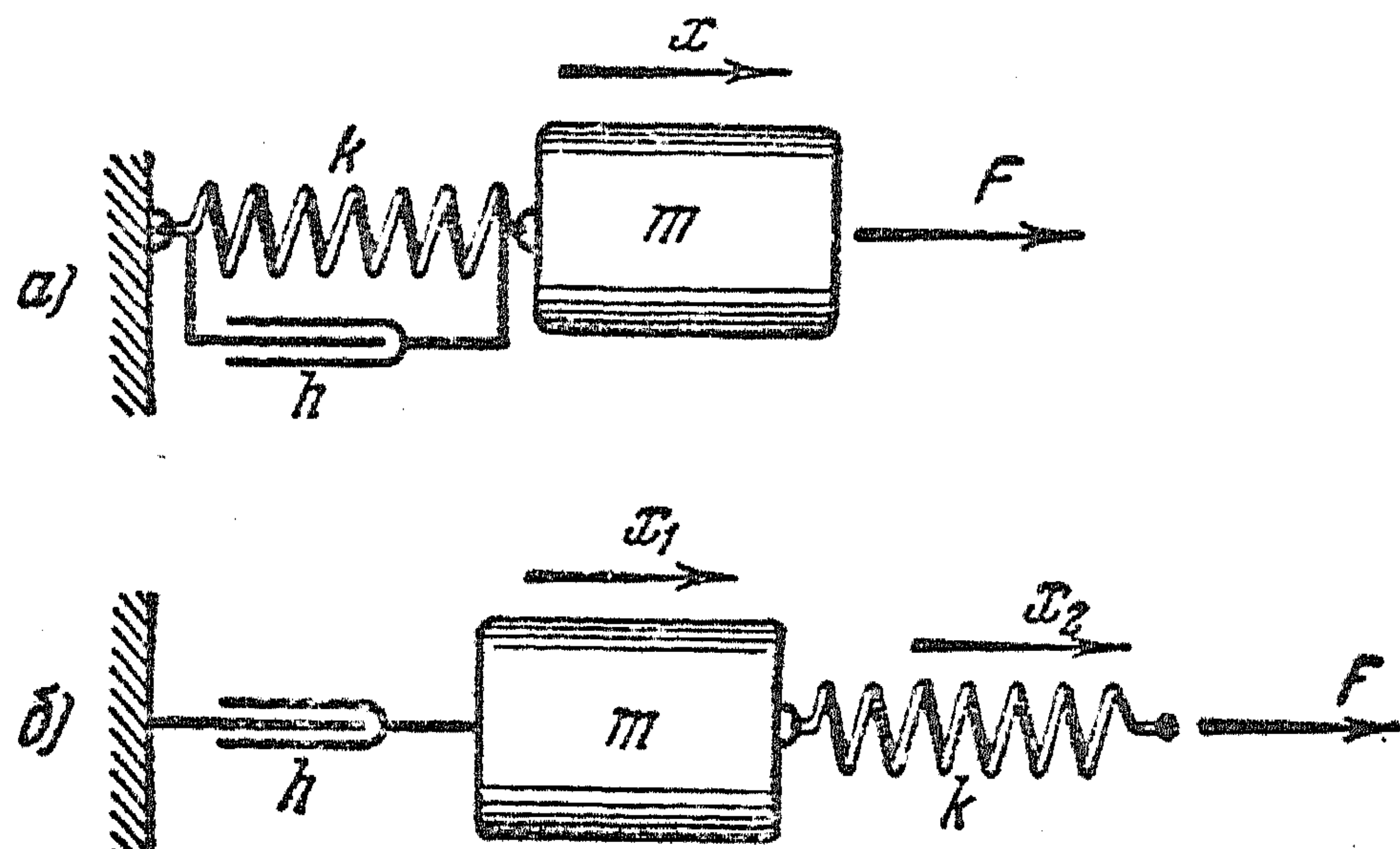


圖 63.

$$F=k(x_2-x_1)=m\ddot{x}_1+h\dot{x}_1. \tag{17.1}$$

如果用 q_2 代表在时間 t 內流过电源接綫截面的电量,而用 q_1 代表流过綫圈导綫截面的电量,流动的方向如矢所示(圖 62, б),那末,对于并联电动势的綫路,其电压方程式將是:

$$\mathscr{E}=\frac{1}{C}(q_2-q_1)=L\ddot{q}_1+R\dot{q}_1. \tag{17.2}$$

不难看出,方程式(17.1)和(17.2)完全相同,因此,無論研究其中的那一个都一样。

將(17.1)用为复数振幅表出

$$\overline{F}=k(\overline{X}_2-\overline{X}_1)=\overline{X}_1(-mp^2+ihp).$$

消去 $\overline{X}_1$,我們得到:

$$\overline{X}_2=\overline{F}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{-mp^2+ihp}\right).$$

按照这一公式,可求得系統的动剛度:

$$\overline{K}=\frac{\overline{F}}{\overline{X}_2}=\frac{k(iph-mp^2)}{k-mp^2+ihp}. \tag{17.3}$$

將(17.2)用复数振幅表出，消去$\bar{q}_1$，并注意到电流的复数振幅$\bar{I}_2=ip\bar{q}_2$时，我們便得到迴路的复数阻抗：

$$\bar{Z}=\frac{\bar{E}}{\bar{I}_2}=\frac{1}{\frac{1}{R+ipL}+ipC}=$$

$$=\frac{R+ipL}{1+ipC(R+ipL)}=R\frac{1+i\gamma Q}{1-\gamma^2+i\frac{\gamma}{Q}}; \qquad (17.4)$$

$\bar{Z}$的表达式比在串联电动势的情况下的(14.16)式要复杂得多。

为了說明电动势的并联与串联之間的物理上的区别，讓我們先在沒有欧姆律电阻(或者摩擦)的情形下，研究上一問題。当假設(17.3)以及(17.4)中的$R=0$以及$h=0$时，那末，机械系統(圖63, б)的动剛度將是：

$$\bar{K}=\frac{kmp^2}{mp^2-k}=k\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}=kx. \qquad (17.5)$$

而并联电迴路的复数阻抗等于

$$\bar{Z}=\frac{ipL}{1-p^2LC}=\frac{1}{ipC}\cdot\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}=\frac{x}{ipC}, \qquad (17.6)$$

显然，其中$x=\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}$是一个仅仅由频率的比$\gamma=\frac{p}{\omega}$来决定的無因次的量。

無因次的量x与γ之間的依存关系如圖64所示，在低频率，即$\gamma\to 0$时，动剛度(或者复数阻抗)等于零。在物理上，这是十分明显的：在恒定力的作用下，具質量m的物体会有無穷大的位移；或者由于支路的欧姆律电阻等于零，直流电源在电感綫路中会产生無穷大的电流。当$\gamma\to\infty$时，动剛度$\to k$，物体在原地“站着”，不作振动，这时，外力为彈簧的形变所平衡，而迴路的复数阻抗則等于电容支路的复数阻抗$\frac{1}{ipC}$，电感电路的电抗为無穷大。

当 $\gamma=1$ 时，动剛度以及复数阻抗都趋于無穷大。在物理上，这表示点 x_2 在原地"站着"，不作振动，而質量 m 則以固有頻率 $\omega=p$ 在彈簧上作振动。并具有这样的振动振幅，使得当振动时，外力的作用完全为彈簧的形变力所平衡。

在电的場合中，当 $\gamma=1$ 时，在迴路中也同样会發生頻率为 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ 的振动。在兩个支路中的电流大小相等而相位相反，因此，在总电路中的电流 $I_2=0$，这就表示迴路中的阻抗为無穷大。

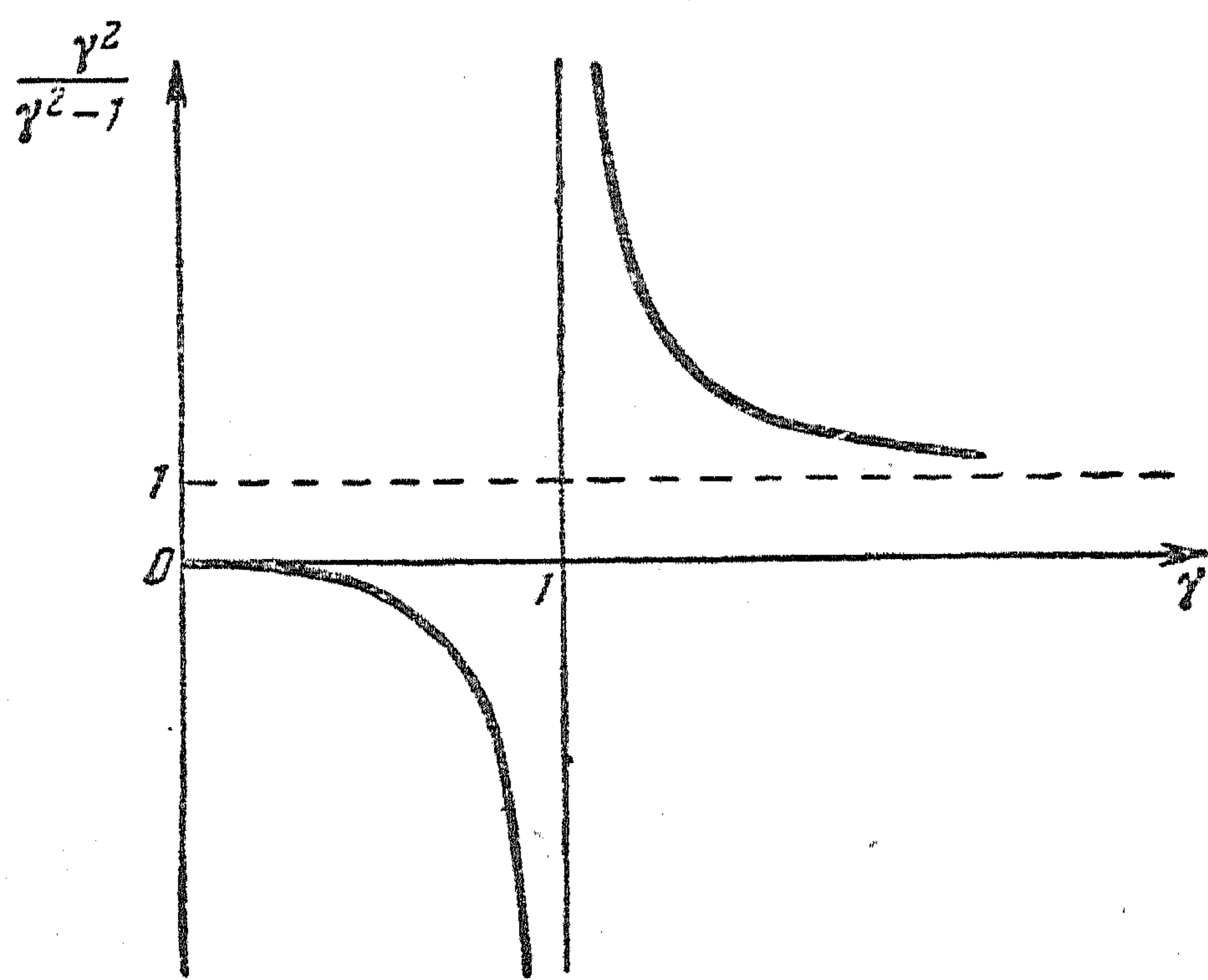


圖 64.

圖 64 給出了动剛度(或复数阻抗)的变化与外力頻率之間的依存关系。振动的相位决定于 x 的符号：点 x_2 的振动，当 $p<\omega(\gamma<1)$ 时，与力反相位；当 $p>\omega(\gamma>1)$ 时，与力同相位。

在电迴路中，总电路中的电流，当 $p<\omega$ 时，在相位上滞后于电动势 $\frac{\pi}{2}$；当 $p>\omega$ 时，导前于电动势 $\frac{\pi}{2}$；当 $p=\omega$ 时，和机械系統的情形一样，發生大小为 π 的相位突变。

由基本方程式(17.1)及(17.2)不难看出，無論頻率 p 是怎样的值，振动的振幅 (x_1, x_2, q_1, q_2 等等) 都不致变为無穷大。例如，随着頻率的增加，通过自感中电流的振幅將單調地下降，而相反的，通过电容分路中电流的振幅將單調地上升。因为当 $\gamma=1$ 时，無論是电流、或是电压都不致变为無穷大，而阻抗(或者剛度)却变为無穷大，因此，这种情形可以称为阻抗共振(或动剛度共振)。

但如果由另外的方法来給出外来的作用，也就是，如果存在这样的設备，在这种設备中，当任何頻率时，在外綫路中的电流强度的振幅，將始終保持恒定；或者說，如果給定了点 x_2 的位移，那末，在系統中过程的情況，將全然不同。通过并联迴路中的电流振动是“已給定的”；彈簧的一端的位移是“已給定的”。而这是怎样实現的呢？为了这，需要怎样的电动势和力呢？——这暂时不重要。

在这种情形下，方程式將具有完全不同的形式，其实，如果 $x_2=a\cos pt$（或者 $\dot{q}_2=b\cos pt$）。那末，方程式（17.1）可以写成这样：

$$m\ddot{x}_1+h\dot{x}_1+kx_1=ka\cos pt. \tag{17.7}$$

方程式（17.7）与外力作用于質量 m 的情况下的方程式（14.1）完全一样。微分（17.2），并用 $\dot{q}_1=I_1$ 以及 $\dot{q}_2=b\cos pt$ 表出，我們得到：

$$L\ddot{I}_1+RI_1+\frac{I_1}{C}=\frac{b}{C}\cos pt, \tag{17.8}$$

上列用电流表出的方程式就和用电荷表出的方程式（14.2）一样。現在迴路中的振动（或者質量 m 的振动），和电动势与迴路串联时的振动，具有同样的特性。这里会發生共振（当 $R=0$ 及 $h=0$ 时，

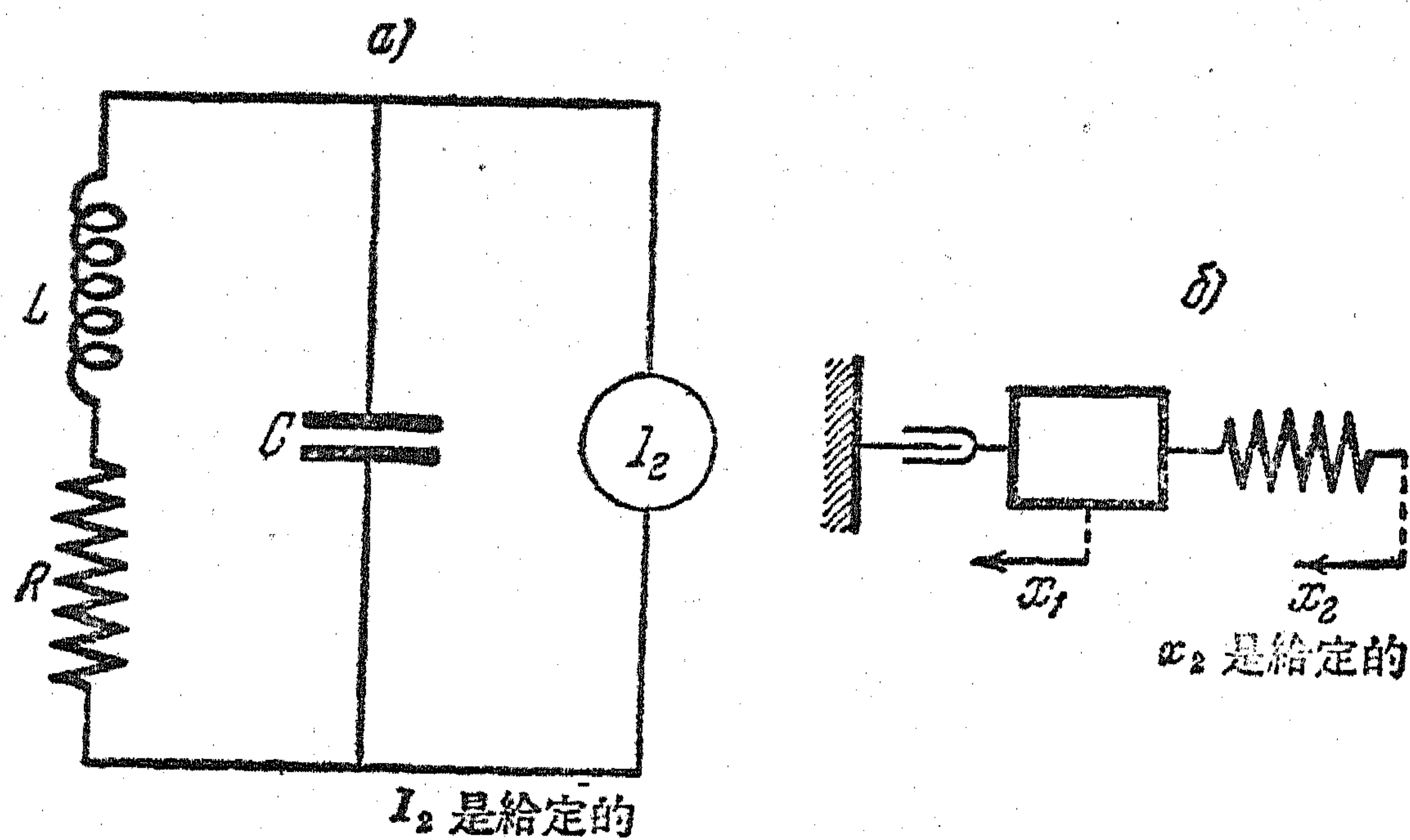


圖 65.

可能"得到"無旁大的电流振幅，电压振幅和位移振幅等等)。因此，也把这种情形称为"电流共振"。可見在这种名称下，不仅要注意电路(或者机械系統)，并且要注意到給出作用的方法。最好如圖 65 那样来簡要地代表"电流共振"。演示受迫振动所用的某种仪器的構造原理就是这样的，仪器的原理圖如圖 66 所示，圖中 A 是蜷簧，它的一头連在帶有飞輪的轉軸上，另一头作給定的諧振动。

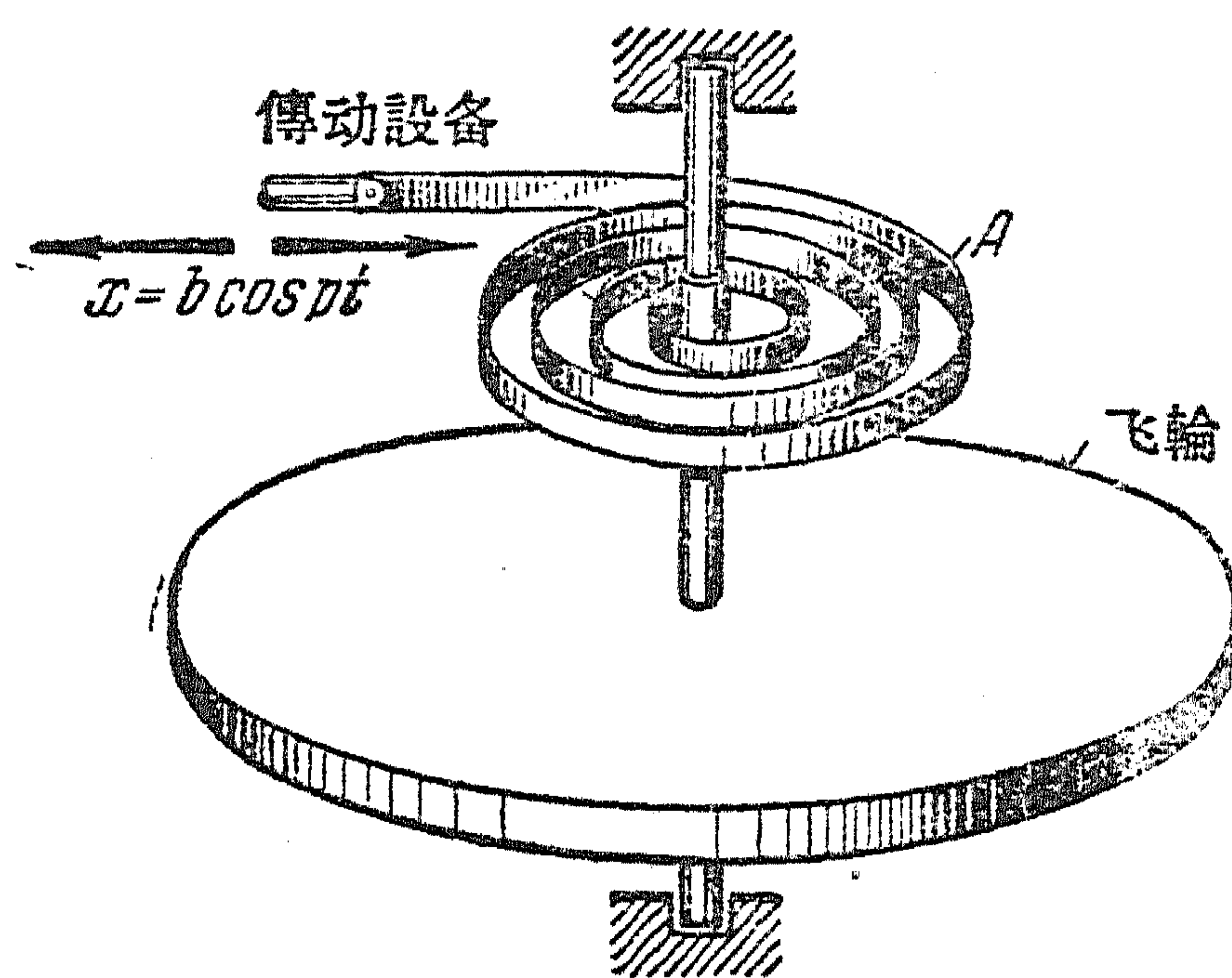


圖 66.

对于并联迴路而言，在电动势接入时，其受迫振动將具有完全不同的情形，因此，將这种情形称为阻抗共振是十分自然的。根据公式(17.4)，并联迴路的复数阻抗的絕对值是:

$$Z_0=R\sqrt{\frac{1+\gamma^2Q^2}{(1-\gamma^2)^2+\frac{\gamma^2}{Q^4}}}.\qquad(17.9)$$

Z_0 与頻率(或与 γ)的依存关系如圖 67 所示。

阻抗最大值發生于 $\gamma_0<1$ 时，对 Q 值較大的情况說，最大值大致發生于:

$$\gamma_0\approx1-\frac{1}{Q^2}+\frac{1}{6Q^4}.$$

很显然，随着 Q 的加大，大約在 $\gamma=1$ 时，阻抗最大。当頻率不断增加的情况下($\gamma\to\infty$)，阻抗趋近于零。当共振($\gamma=1$)时，

$$Z_0=RQ\sqrt{Q^2+1},$$

当 Q 的值很大时，阻抗大致为:

$$Z_0 \approx RQ^2 = \frac{L}{CR} = Q\sqrt{\frac{L}{C}}, \qquad (17.10)$$

$\left(\text{記得: } Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)$。

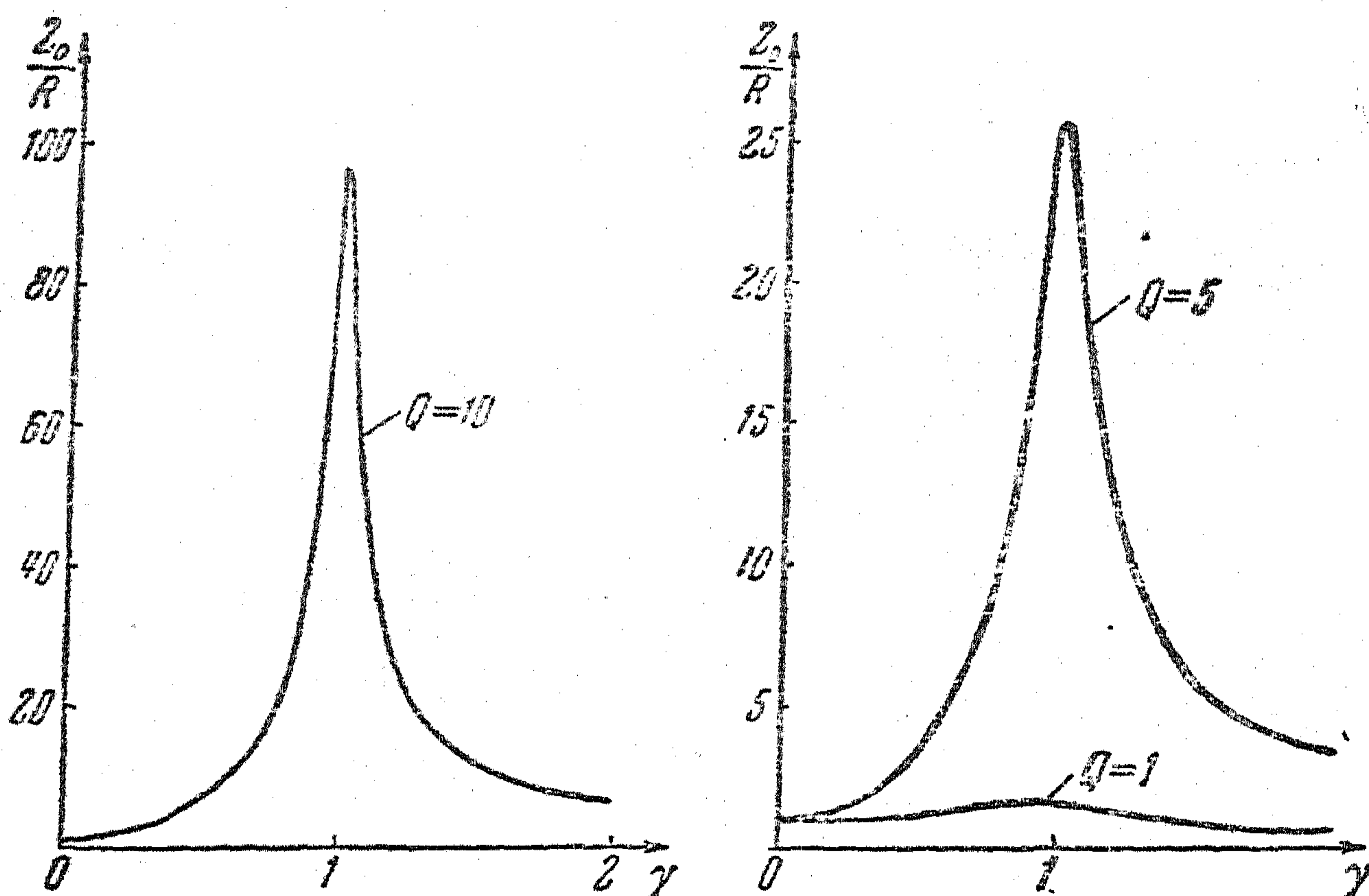


圖 67.

当共振时，迴路的阻抗急剧地增加，它与品質因数的平方成正比。而且当共振时，并联迴路的阻抗相当于一个电阻。公式(17.10)在無綫电技术的实际計算中常常用到。

为了表出共振时($\gamma=1$)复数阻抗的完整的値，写出其准确的公式是有用的：

$$\bar{Z}_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}}(Q-i), \qquad (17.11)$$

令(17.4)中的 $\gamma=1$，便不难求得上式。

当 Q 很大时，$\bar{Z}$ 的虛数部分可以忽略，因而可以把阻抗大致上認为是(17.10)的純电阻。

§ 18. 任何形式的外力对綫性振动系統的作用

如果外力 $f(t)$ 是周期 T 的任一周期函数，那末，总可以將它展

开为傅立叶三角級数。

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos npt+b_n\sin npt.$$

于是，根据叠加原理，机械系統中位移的受迫振动，可由（15.14）求得：

$$x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos(npt+\varphi_n)+b_n\sin(npt+\varphi_n)}{k\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2+\frac{\gamma_n^2}{Q^2}}},\tag{18.1}$$

其中 $$\gamma_n=\frac{pn}{\omega}\ 及\ \varphi_n=\operatorname{arctg}\frac{\frac{\gamma_n}{Q}}{1-\gamma_n^2}.$$

如果 $f(t)$ 是串联于迴路中的电动势，而用 $\frac{1}{C}$ 来代换(18.1)中的 k，其中 C 为迴路中电容器的电容，那末，这一表达式当然也可以描述在迴路中电容器上电荷的振动。

假如外力是非周期性的，那末，可以將它展开为一些無穷小的正弦振动分量（傅立叶积分），在这种情形下，也可以和在周期性外力的情形一样求解，这解具有积分形式。只是这里我們研究的是稍稍不同一些的求解方法。

首先假設有一任意形式的力 $f(t)$ 作用于一沒有摩擦的振动系統上，为了叙述的簡潔起見，我們有意把一些数学上的細节暫且放在一边。

我們記得，在沒有摩擦的綫性系統中，在 $x=x_0$，$\dot{x}=\dot{x}_0$ 的起始条件下，根据(3, 2)，固有振动是：

$$x_1=x_0\cos\omega t+\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t\ (当\ t>0\ 时),$$

現在設想在 $t=\xi$ 的这一瞬間，有一力的冲量作用于正振动着的物

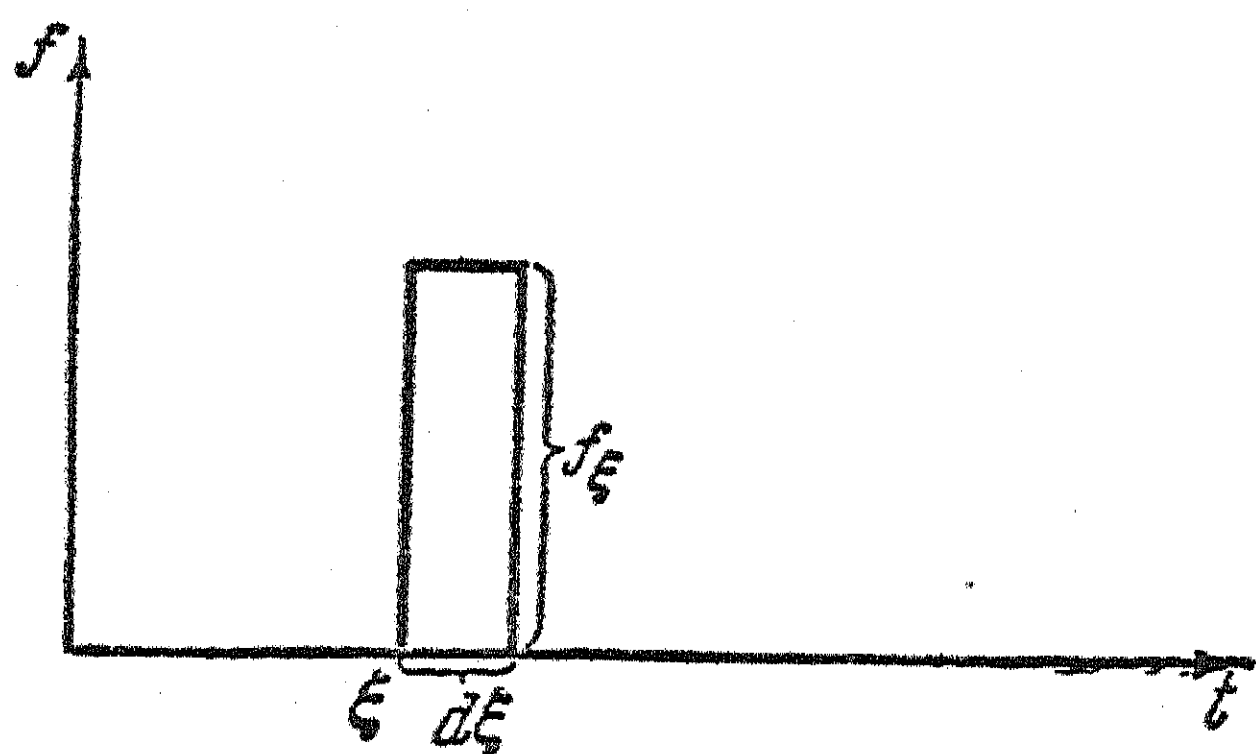


圖 68.

体上(圖 68)。并認为这一冲量的作用是瞬时的($d\xi\to0$),因此,在力正作用的时間內,質量不变更它自己的位置;但在冲量作用以后,質量的速度發生下列大小的突变。

$$dv=\frac{f_\xi d\xi}{m}.$$

因此,对于 $t>\xi$ 的时間,系統中的运动可以写为:

$$x=x_1+\frac{f_\xi d\xi}{m\omega}\sin\omega(t-\xi).$$

在上式的物理意义是:在系統中,由于起始条件的关系,已經存在着振动。而在 $t=\xi$ 以后,由于力的冲量(冲击)的結果,系統中产生了額外的振动,这振动与在冲击以前存在的振动彼此相加。

現在把一任意的外力想像为一些連續的、一个跟着一个的冲量的总和(圖 69)。根据叠加原理,十分清楚,每个脉冲所产生的振动,和在它之前在系統中已存在的振动彼此相加。因此,一个連續的作用力作用的結果,將是無穷多个無穷小振动的和,这就是积分。現在將質量的运动写为数学公式:

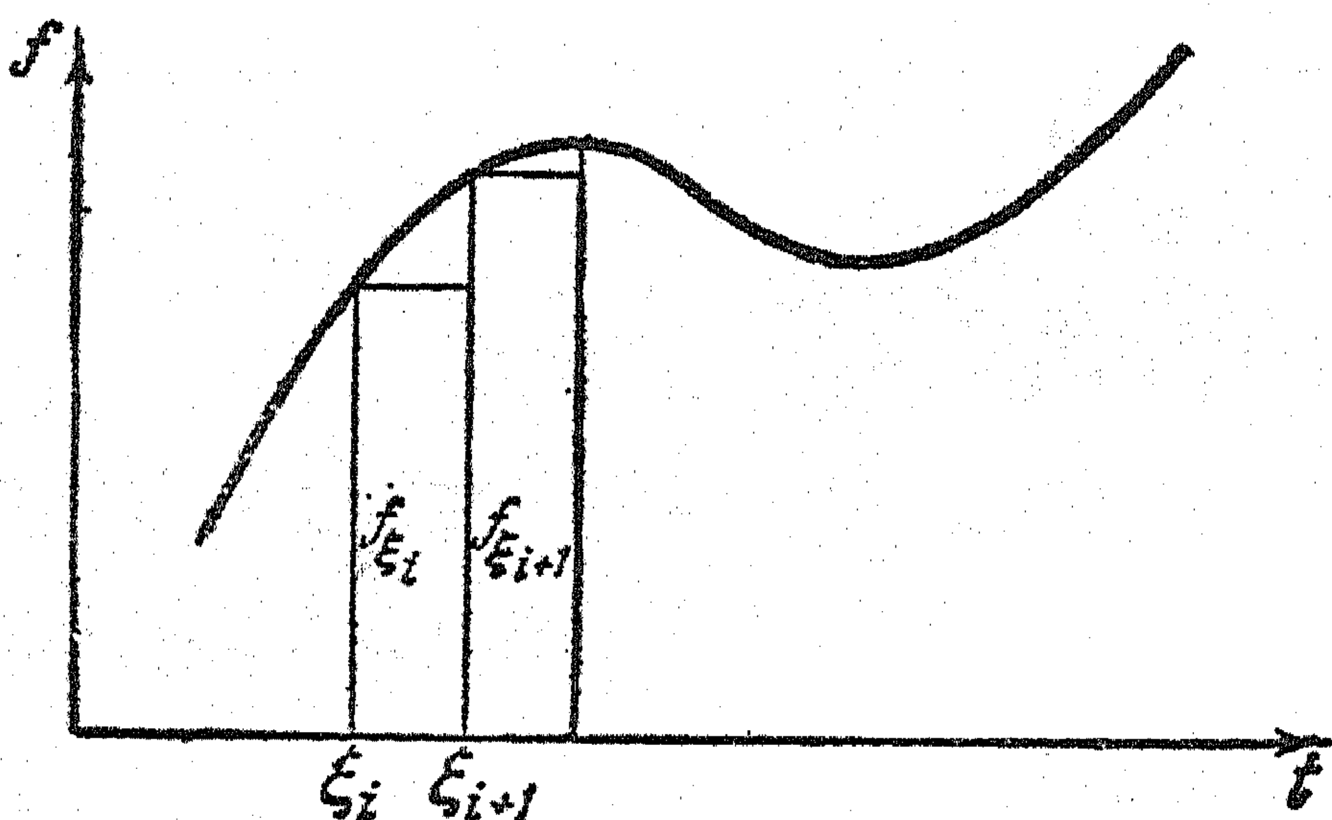


圖 69.

$$x=x_1+\frac{1}{m\omega}\int_0^t f(\xi)\sin\omega(t-\xi)d\xi. \qquad (18.2)$$

上式也就是在 x_0 及 $\dot{x}_0$ 的起始条件下，受任意外力 $f(t)$ 作用的振动的表达式。

例如，由这一公式可以得到諧振时的振动的表达式。其实，如令

$$f(t)=B\sin\omega t;$$

那末，

$$x=x_1+\frac{B}{m\omega}\int_0^t \sin\omega\xi\sin\omega(t-\xi)d\xi=x_1-\frac{1}{2}\cdot\frac{Bt}{m\omega}\cos\omega t.$$

不难將公式(18.2)推广到具有阻尼的系統的情形中。令运动方程式为:

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega^2 x=\frac{1}{m}f(t).$$

用 $u=xe^{\delta t}$ 代入后，振动方程式可以化为下列形式:

$$\ddot{u}-\omega_1^2 u=\frac{f(t)}{m}e^{\delta t},$$

其中 $\omega_1^2=\omega^2-\delta^2$，对于这一方程式而言，根据(18.2)

$$u=u_1+\frac{1}{m\omega_1}\int_0^t f(\xi)e^{\delta\xi}\sin\omega_1(t-\xi)d\xi.$$

如果根据公式 $x=ue^{-\delta t}$ 由 u 反轉来求 x，那末我們得到:

$$x=u_1e^{-\delta t}+\frac{e^{-\delta t}}{m\omega_1}\int_0^t f(\xi)e^{\delta\xi}\sin\omega_1(t-\xi)d\xi;$$

最后得:

$$x=x_1+\frac{e^{-\delta t}}{m\sqrt{\omega^2-\delta^2}}\int_0^t f(\xi)e^{\delta\xi}\sin\sqrt{\omega^2-\delta^2}(t-\xi)d\xi.\quad(18.3)$$

(18.3)式是具有摩擦的綫性系統，在任意外力作用下的最一般的

数学表达式。

§19. 隔振設备的理論基础(抑振)

周期振动,例如那些由机器的运行所产生的振动,常引起一些不良的后果。电机、輪机等等,由于其旋轉部分的不平衡,常常成为振动的来源。內燃机,由于存在着某些部分的往复运动以及排气,也是周期性扰动(力)的来源,扰动力通常随着机器轉速的增加而增加。因此,削弱振动这一課題便成为技术上的迫切的任务。解决它的办法是:或者用特殊的彈性基础結構,或者用工作机器的彈性支架的設备,如果机器和支持它的基础之間沒有彈性,那末,作用于机器上的扰动力,便差不多全部都傳給基础,并进一步傳給靠近它的物体。

彈性支架,在一定的条件下,可以削弱傳給基础上的扰动力。

彈性支架(彈性基础)的原理圖如圖 70 所示。机器以及与它接触的基础部分用質量 m 表示,基础用剛度为 k 和具有摩擦系数 h 的彈簧来表示,假設有周期性的力 $F=F_0\cos pt$ 作用于机器上,这力会引起机器的振动。現在来計算在振动时作用于地基上的力 F',力 F' 是由彈簧的形变力以及摩擦力所組成的。

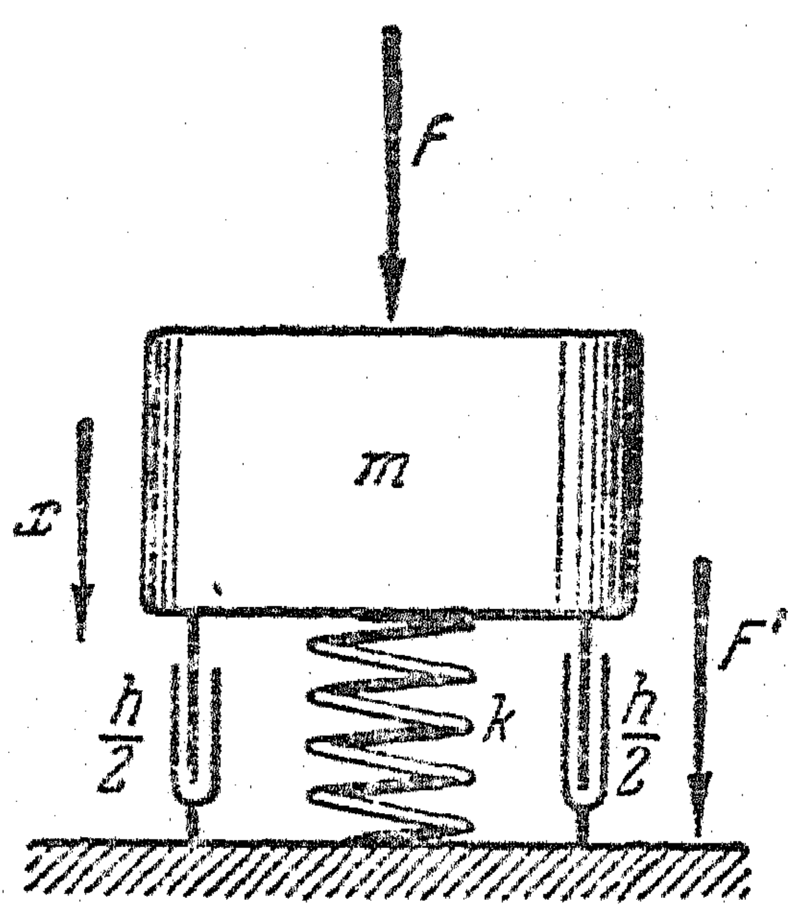


圖 70.

用 x 表示質量由平衡位置的垂直位移,那末,力

$$F'=kx+h\dot{x}, \qquad (19.1)$$

或者,以复数振幅表示

$$\overline{F}'=(k+iph)\overline{X},$$

其中 $\overline{X}$ 是質量的位移 x 的复数振幅。

根据(14.9),复数形式的扰动力 $\overline{F}$ 与位移振幅的关系为:

$$\overline{F}=(-mp^2+k+ihp)\overline{X}, \qquad (19.2)$$

在这种情形下, $\overline{F}'$ 及 $\overline{F}$ 兩力間的相位关系对我們說是不重要的,需要的仅仅是兩个力的振幅 F_0' 和 F_0 的比。

由(19.1)及(19.2)得:

$$F_0'=\sqrt{k^2+(ph)^2}X_0,$$

$$F_0=\sqrt{(k-mp^2)^2+(ph)^2}X_0.$$

用 α 来代表振幅的比, α这个量称为消震系数①。那末,

$$\alpha=\frac{F_0'}{F_0}=\sqrt{\frac{k^2+(ph)^2}{(k-mp^2)^2+(ph)^2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\gamma^2}{Q^2}}{(1-\gamma^2)^2+\frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \qquad (19.3)$$

α 与系統的振动参数 (Q 与 γ) 的依存关系,对我們所感兴趣的問題,提供一个全面的答复,这一依存关系的圖形如圖 71 所示。

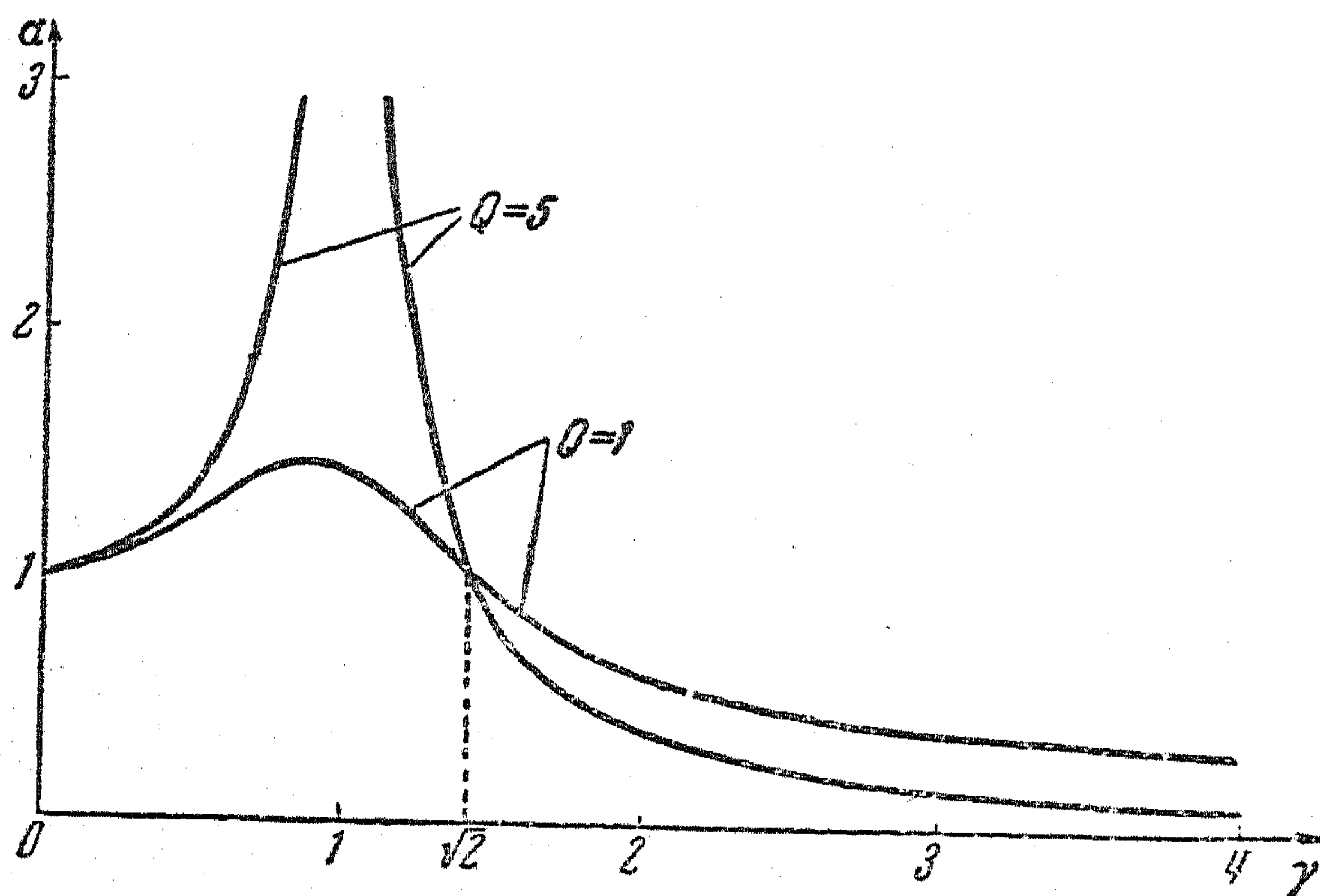


圖 71.

所有的曲綫(对于任何 Q)都通过 $(0,1)$ 及 $(\sqrt{2},1)$ 兩点,因

① 原文为: Коэффицент Демпфирования——譯注。

此，仅仅当 $\gamma>\sqrt{2}$ 时，抑振支架才有用处($\alpha<1$)。位于彈性基础(或者支架)上的机器，其振动的固有頻率应該比扰动力的頻率小得多，即 $\omega\ll\frac{p}{\sqrt{2}}$，在抑振設备的彈性体上的机器，其振动的固有頻率愈小，設备的品質愈好。

如果有一些具有不同頻率的力作用于机器上，那末，必須保証对于具最低頻率的力，有足够小的 α 的值，对于具比較高的頻率的力說，抑振作用將要更好一些。

有阻尼存在或者增加阻尼(減小 Q)总使支架的抑振作用变坏。因此，应該尽可能的增加 Q。然而，在实际上，这样做只对于固定裝置是有效的，固定裝置所具有的扰动力，如我們在理論上曾假設的，仅仅由諧力的和所組成，即：

$$F=\sum_{n}F_{0n}\cos(p_nt+\varphi_n),$$

可是，例如对在飞机上运行的發动机而言，扰动力則不仅仅由諧分量所組成，即令是在直綫的航程里，飞机总受到一些不規則的冲击，这些冲击会引起固有振动(这种理論前面未考虑过)。

当 Q 很大时，在彈性支架上机器的固有振动，將在頗長的一段时間內不衰減下去。因而它反而成为不惬意振动的来源。在这种情况下，設計抑振时，甚至靠增加高頻范圍里的周期性扰动力的 α，来使支架的 Q 減小一些。

抑振器的作用可以想像为这样：在某个振幅的扰动力的作用下，有某一定質量的物体在彈簧支架上振动着，可是支架是这样的"軟"(剛度小)，以致使支架的変变形变力显得微小，扰动力差不多完全被質量的慣性力所平衡，人們常常把这称为"質量消震"。

仅仅在彈力和摩擦力是綫性的情况下，以及如我們曾作过的，当可以把地基(或彈簧支架)認为是絕对剛体时，抑振理論才如此

簡單。事实上，彈力和摩擦力常常是非綫性的(有时甚至是原理上的关系，而不是由于結構时的錯誤)，这就使抑振理論大为复杂起来。在这种情形下，沒有一般的理論，对于每一种特殊情况的問題，必須用不同的方法去解。

那些不能受振动，但又被放在如飞机、車箱、輪船、汽車等諸如此类的物体上的仪器或其他設备，对于它們的抑振，实际上也是用具阻尼的彈簧支架来完成的，仪器的抑振理論(在綫性范圍內)將在下一章的地震式仪器一节中来研究。

第四章　記录仪器的理論綱要

§20. 关于記录仪器的基本知識

指示某一定物理量的値的各种仪器，式样很多。在这里我們仅仅就其中的某几种类型的構造原理来进行研究，这些类型都是根据前面講过的共振規律操作的，并且是用以記录那些随时間作快速变化的量的，因而我們有条件地称之为記录仪器。

差不多所有的仪器，或者，至少是这里所指的仪器，都是根据被測的量与力之間的一定規律关系制造出来的。例如，在指示电流强度的磁电式仪器中，作用于动圈上的磁力矩与电流成正比。而力矩一般又系按照它所引起的彈簧的形变来衡量（測力計原理）。因此彈簧，有时也称为"恢复"彈簧，是仪器的基本元件之一。

在这种磁电式仪器中，磁力矩轉动着动圈（和指針），一直到磁力矩与"恢复"彈簧作用于动圈上的力矩相等时为止。

記录仪器的最簡單原理圖如圖 72 所示。F 是由被測之量 y 所产生的力；x 是仪器的讀数，它与彈簧受力 F 作用时的形变成正比。仪器的校准曲綫为：$x=f(y)$。仪器的基本特性是：1)被測量的变化范圍；2)灵敏度$\sim\frac{\partial x}{\partial y}$；3)准确度$\frac{\Delta y}{y}$，这里的 Δy 是仪器可能記录的数値。仪器的品質还可以用它的讀数的恒定性等等来衡量。無論指示靜态量的仪器，或是記录仪器都有这些特性。

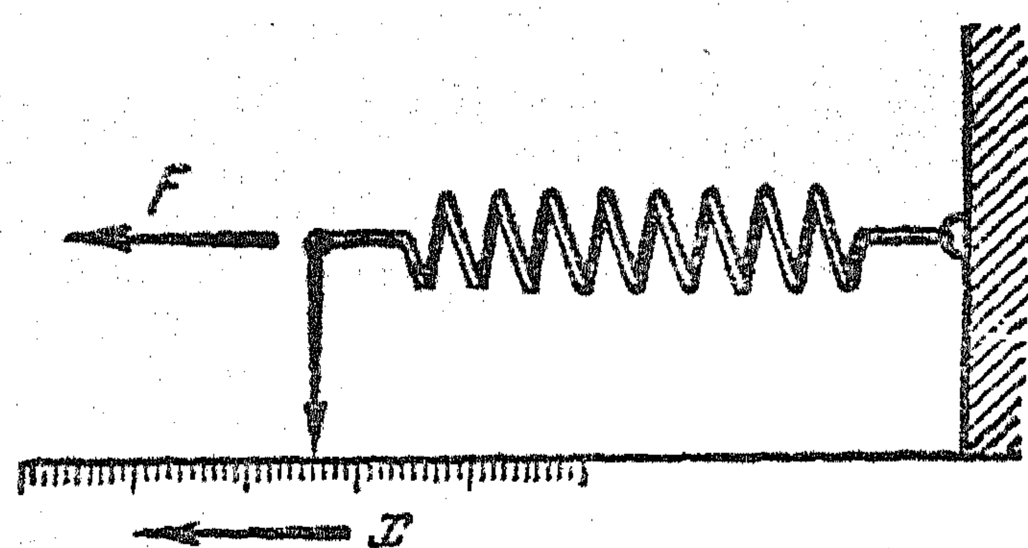


圖 72.

現在，我們感兴趣的是对記录仪器的基本要求，关于这，可以

这样地陈述：仪器讀数的記录用 $x(t)$ 代表，那末，这一函数与函数 $y(t)$ 有多少共同之处呢？是否可以写出等式 $y(t)=Bx(t)$ 呢？这里 B 是常数。

应該預先指出的是：沒有哪一种仪器可以用来記录任何种过程。每一个仪器都会产生畸变，而仅仅对于一定类型的过程，才能使这种畸变很小。因此，可以按照仪器原来打算测量的那一类过程的記录，来衡量仪器的品質。这里便有了矛盾：我們应該知道过程，而为了得到过程的記录（我們只有根据記录来認識过程），我們又必須制造仪器。这一矛盾是用逐次逼近的方法来解决的。因此，当研究新的現象时，就常常会發生誤解，要消除这些誤解，必須准确地知道該仪器的应用限度，以及当用它来記录另一形式的过程时所产生的誤差。在这里，記录仪器的理論基础知識，便显出了巨大的作用。

現在把我們要講的仪器分为四类：1)准静态仪器，2)共振仪器，3)地震式仪器以及 4)冲击仪器。

§21. 准静态仪器

既能記录可变量，又能記录静态量的仪器，我們称它为准静态仪器。彈簧加上一支質量極小的指針是这种仪器的理想形式。而事实上，当测量可变量时，彈簧和指針（以及某些附属部分）都必須运动，因此慣性力和摩擦力都不可忽略。

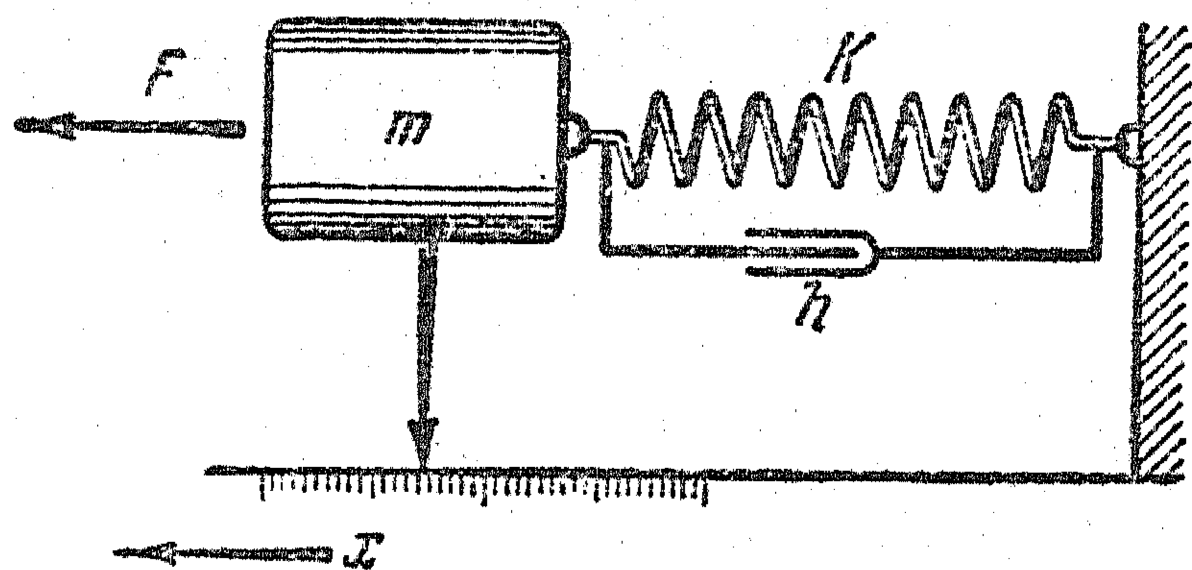


圖 73.

这种仪器的原理圖如圖 73 所示。圖中的所有元件都認为是綫性的。在記录仪器中，一般很不希望有非綫性，但可惜的是，有时还必須忍受它。

按照圖 73 所制造的仪器，其静态灵敏度①与彈簧的剛度成反比$\left(\frac{\partial x}{\partial F}=\frac{1}{k}\right)$。这仪器除記录静态过程以外，也可以記录变化的过程，但仅仅是近似的記录，并且仅仅在下列的条件下才能記录：

$$|m\ddot{x}|\ll|kx|,\quad |h\dot{x}|\ll|kx|. \tag{21.1}$$

显然，这些不等式的兩边相差愈大，仪器在記录变化的力$F(t)$时，其誤差也愈小。但是，一般不可能利用在这种形式下的条件(21.1)，因为这需要預先知道正預备記录的全部过程。对于周期过程說，由于綫性的緣故，条件(21.1)將具有确定的形式。而对于頻率为p的一个正弦波而言，畸变微小的条件(21.1)可以写成这种形式：

$$mp^2\ll k,\ hp\ll k,$$

或者，引用普通的表示符号时，則为，

$$p\ll\omega\ 或\ \gamma\ll 1,\ \gamma\ll Q, \tag{21.2}$$

因此，如果仪器的固有頻率比所記录的振动的頻率大得多，以及品質因数比$\gamma=\frac{p}{\omega}$大得多时，那末，它所記录的正弦振动便与正确的很相近。从而就是对最高次諧波为p的周期振动而言，仪器也能記录得正确。

然而，条件(21.2)不是总可以实現的。因为准静态仪器的静态灵敏度和动态灵敏度相同，所以第一个条件通常会引起仪器灵敏度的过分降低。因此，最好能对仪器所能記录的最高頻率的限度，作出一个比較准确的估計，在这种限度以內，仪器的記录沒有多大的畸度。

对于可以由一些正弦波的和来表出的过程，这种估計是不难作出的。令作用于仪器的力为

① 指在测定恒定量时仪器的灵敏度。

$$F=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(p_n t+\varphi_n\right).$$

那末，我們由(18.1)知道，仪器的讀数是

$$x(t)=De^{-\delta t}\sin(\omega_1 t+\chi)+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac{A_n}{k}}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2+\frac{\gamma_n^2}{Q^2}}}\cos\left(p_n t+\varphi_n+\varepsilon_n\right),$$

其中

$$\gamma_n=\frac{p_n}{\omega}\quad 以及\quad \varepsilon_n=\operatorname{arctg}\frac{\frac{\gamma_n}{Q}}{1-\gamma_n^2}.$$

固有振动使开头一段时間的記录产生畸变，經过一段时間 $s\tau_0=\frac{s}{\delta}$ 以后，固有振动减小到 e^s 分之一，取 $s\approx5$ 便足够了，这时固有振动將小于其起始值的 1%。

为了使过程得到准确的重現，必須使 $\alpha_n=(1-\gamma_n^2)^2+\frac{\gamma_n^2}{Q^2}$ 的值以及 $\beta_n=\frac{\frac{\gamma_n}{Q}}{1-\gamma_n^2}$ 的值，对于所有的頻率 p_n，都大体上相同。因为当 $\gamma\to0$ 时，$\alpha\to1$ 以及 $\beta\to0$，所以应該选擇这样的仪器的 Q，使得当 γ_n 的值尽可能大的时候，α_n 的值与 1 相差很少，而 β_n 的值与零相差很少。

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ 的曲綫所表出的就是我們已經知道的圖 59 所示的依存关系。由那些对应于不同 Q 值的 $u=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ 的曲綫以及 $\varphi=\operatorname{arctg}\beta$ 的曲綫（圖 61a）当中可以看出，前一段中所列的要求是互相矛盾的。要 α 接近于 1，就得选用不大的、大約等于 1 的 Q，但这样的 Q，会产生比較大的相位畸变（圖 61a），因为当 $Q\approx1$ 时，$\varphi=\operatorname{arctg}\beta$ 随着 γ 的增加而急剧的加大。

例題 $Q\approx 0.9$，在 γ_0 时可以預期到 α 与 1 的最大差值（在 $\gamma\leqslant 1$ 的区域內）。根据公式(15.18)，这个 γ_0 等于

$$\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\approx\sqrt{1-\frac{1}{2\times 0.8}}\approx\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

当 γ_0 时，$\sqrt{\alpha_{\text{мин}}}$ 的值將是

$$\sqrt{\left(1-\frac{6}{16}\right)^2+\frac{6}{16\times 0.8}}\approx\frac{15}{16}.$$

$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ 的路徑如圖 74 所示，在 $\gamma_{\text{макс}}=1$ 以前，振幅的畸变不大于 10%。在这种情形下，看起来好像可以將 p_n 的最大值增加到仪器的固有頻率，可是，这时相位差 $\varphi=\text{arctg}\,\beta$ 的最大值將达到 90°，如果我們想無畸变地來記录过程，这是不能容許的。即令是在 $\gamma_{n\,\text{макс}}=\frac{1}{2}$ 时，最大值 $\beta_{n\text{макс}}=\frac{20}{27}$。

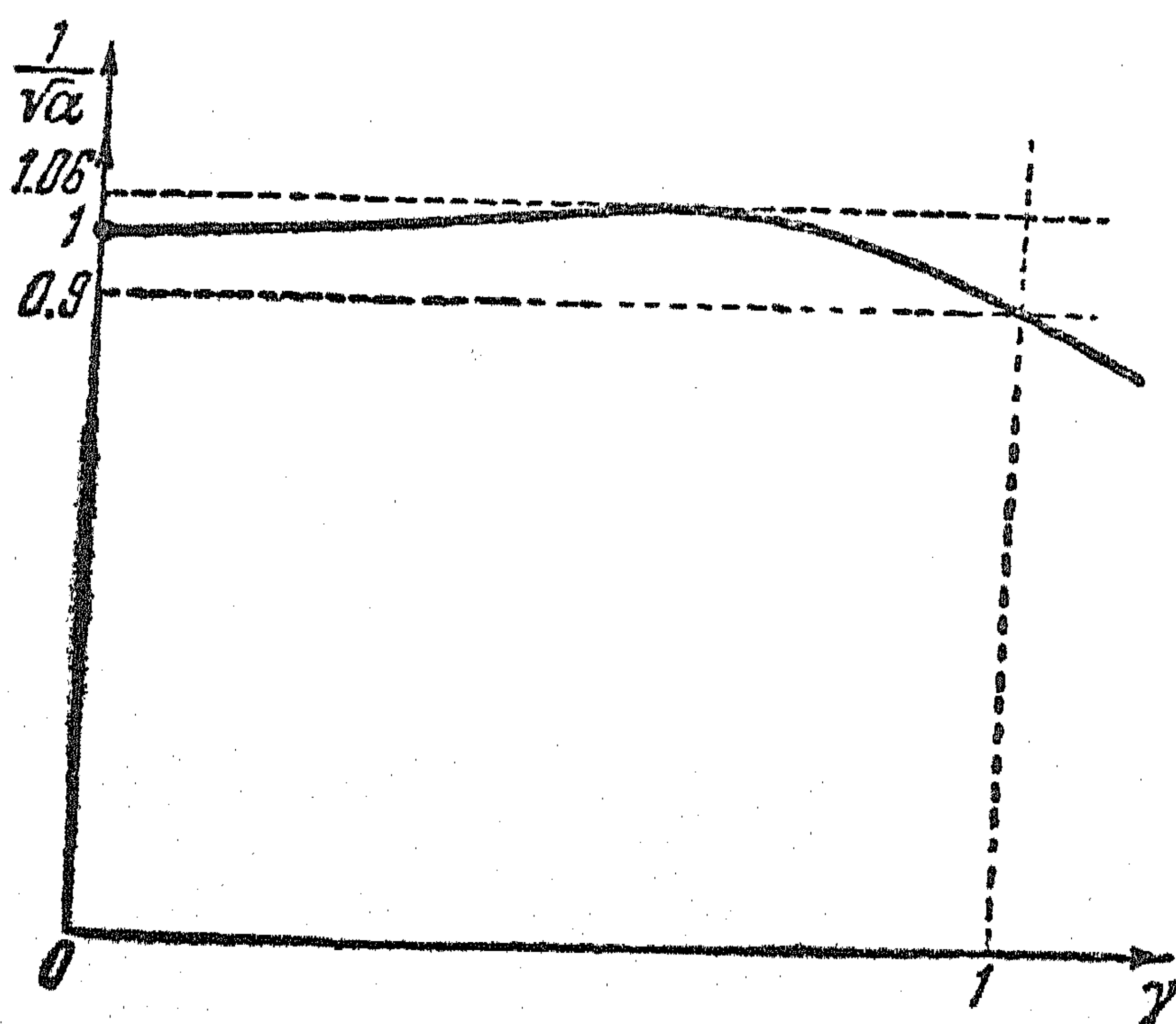


圖 74.

对于高次諧波而言，仪器所产生的相位差將是 $\approx 35-40^\circ$。在某些情形中，可以容許有这样的畸变，但是应該注意到这一点。因此，即令是在 $\gamma_{n\,\text{макс}}\approx\frac{1}{2}$ 附近的頻率区域，仪器的使用仍有一定的限度。

实际上，在設計仪器时，必須在相位畸变与振幅畸变之間取其折衷。这里有一些典型的計算結果：假如选擇 $\gamma_{n\,\text{макс}}\approx\frac{1}{2}$，并容許不大的相位畸变（不大于 6°），那末，当这一仪器的品質因数 $Q\approx\approx 7$ 时，对最高頻率而言，仪器將产生 25% 的振幅畸变；如果將記录的頻帶減小到 $\gamma_{n\,\text{макс}}=\frac{1}{4}$ 并容許 6° 的相位畸变，那末，振幅畸

变將大致是 7%（仪器的 $Q\approx4$）。

由这些典型計算以及由圖 59 和 61 的曲綫可以看出，要得到好的仪器，必須力求被測頻帶的減小。例如，当 $\gamma_{n\ \text{макс}}=0.1$ 时，品質因数对振幅差不多沒有什么影响，而对相位的影响則稍微大一点。

上述的結果說明了，必須將 Q 选擇得尽量的大；然而由于下列的、在实际上十分重要的緣由，又不能这样作。当 Q 很大时，在仪器中的固有振动將長久不衰減下去，这会使过程的記录畸变得很厉害。因此，应該选擇小的 Q（Q 接近于 1）。

如果需要在無畸变的条件下来記录高于 500—1,000 赫的頻帶，那末，在实际上便很难制造出一种机械的仪器，使仪器所測量的頻帶在它固有頻率的 10% 以下。

从这种观点看来，压电式与电容式的听筒是最完善的。就压电式的听筒而言，它的固有頻率不难达到射頻頻率，因此，在这个意义上，这种听筒对于音頻頻帶說是十分完善的（$\gamma_{n\ \text{макс}}\ll1$），所以常常把它用来作送話器；可是，压电式听筒却很难用来記录低頻振动，这是因为这时放大管輸入电路对絕緣的要求很高。当設計电容式的听筒时，由于在固有頻率高时，听筒的灵敏度下降，使得我們不得不降低固有頻率。假如仪器是用以記录 100—200 赫以下的低頻，那末固有頻率一般选擇在 ≈1000 赫。

在这种类型的仪器中，最重要和最常用的就是鏈式示波器。鏈式示波器是用来对电流振动作有光的記录。它的構造如下：在磁場中，一由坚实細导綫所作成的迴綫牽紧在絕緣子上，这兩根导綫上粘有一面小鏡 A（圖 75）。当电流通过迴綫时，一根导綫向前移，而另一根导綫向后移，于是小鏡便被偏轉，偏轉的角度与电流强度成正比。当有光綫射在这小鏡 A 上时，小鏡的偏轉便被記录在运动着的感光紙上或者幕上。

仪器的記录元件的固有頻率决定于綫的粗細，綫的材料所容許的应力，以及小鏡的質量与尺寸。能够將鏈的固有頻率做到 10,000 赫左右。但这样鏈的灵敏度不高，因此一般鏈的固有頻率范圍为 2000—5000 赫。为了选擇适当大小的小鏡振动的阻尼(适当大小的 Q)，通常把迴綫同小鏡一并浸入具有一定粘滯系数的透明的油中。

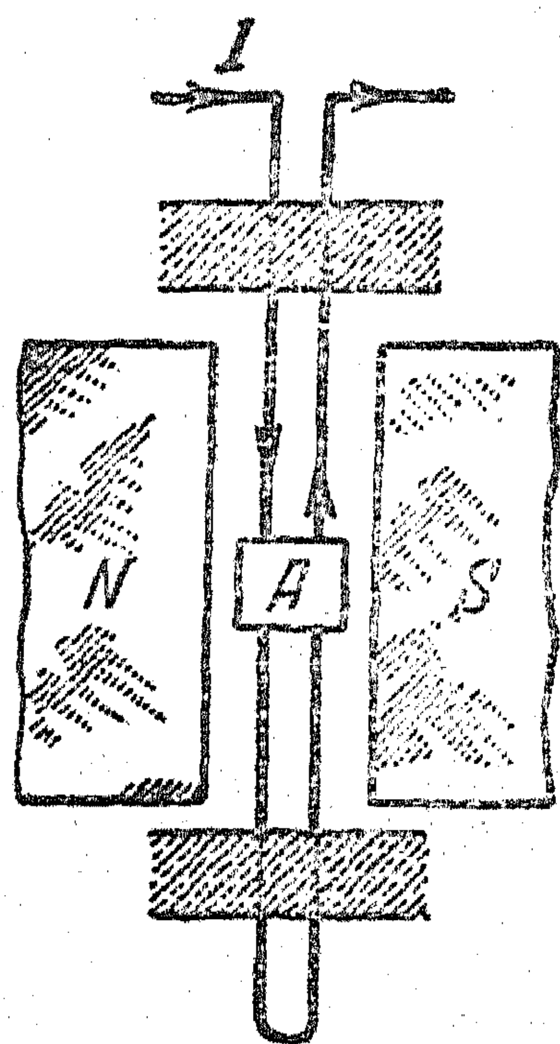


圖 75.

假如在运动的感光紙上記录周期过程时，所感兴趣的仅仅是表明过程进行的曲綫的形狀，那末便可以降低一些对上述的关于增高固有頻率的要求。但这时整个曲綫將錯动一段时間。这里我們再一次指出，假如对于所有的頻率說，相位差都是零时，那末在紙上的記录將沒有畸变，当然这是指在沒有振幅畸变的情况下而言。这时，記录的形狀以及小鏡随时間的运动將与实际过程形成准确的对应。

假如对于所有頻率說，相位差都是同样的，那末，在感光紙上所記录的过程的形狀以及小鏡的运动，都会有畸变。只要分析一个簡單的例子，便不难理解这一点。

假定过程含有兩个正弦波，其中一个的頻率比另一个頻率大一倍(圖 76, a)。

假設这一对正弦波都具有 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 的相位差，那末，記录以及小鏡随时間的运动如圖 76, $б$。其实，一次諧波在时間上的滯后为:

$$\frac{\varphi}{2\pi}T=\frac{\pi}{4\times 2\pi}T=\frac{1}{8}T,$$

而二次諧波在时間上的滯后为:

$$\frac{\varphi}{2\pi}\times\frac{T}{2}=\frac{T}{16},$$

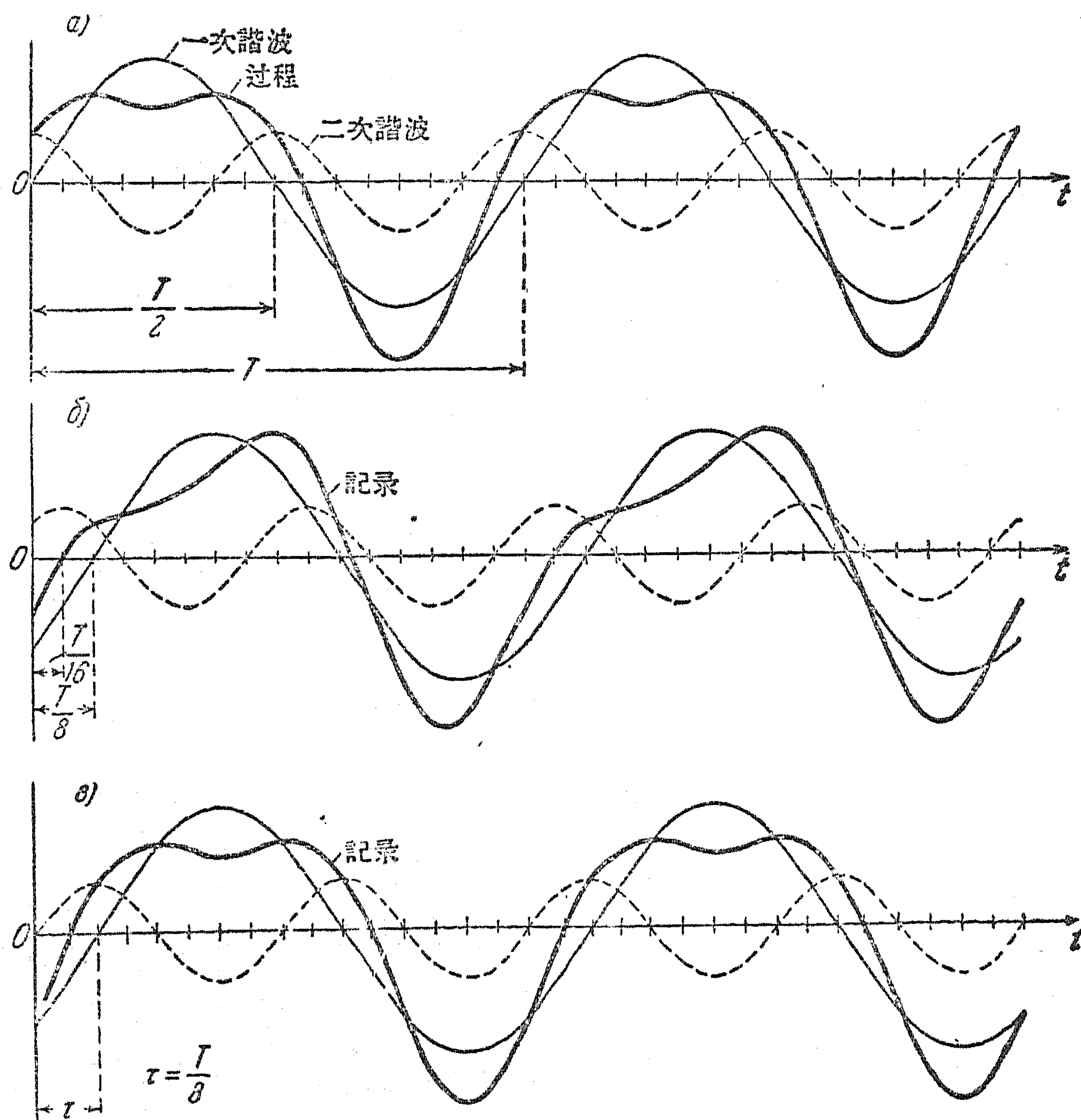


圖 76.

因此，由小鏡随时反射而繪出的曲綫，其形狀便具有畸变。

假如仪器具有这样的特性，在其中所發生的相位差与頻率成正比，即 $\varphi_n=$ 常数 $\times p_n$，那末，曲綫的形狀將沒有畸变。事实上，对于所有頻率說，每一分量在时間上的滯后都是相同的：

$$\tau=\frac{\varphi_n}{2\pi}T_n=\frac{\varphi_n}{2\pi}\times\frac{2\pi}{p_n}=\text{常数}。$$

在圖 76，в 上繪出了同一过程当相位差等于

$$\varphi_n=\frac{T}{8}p_n$$

的条件下的記录。

一次諧波的相位差为

$$\varphi_1=\frac{T}{8}\times\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4},$$

二次諧波的相位差为

$$\varphi_2=\frac{T}{8}\times\frac{4\pi}{T}=\frac{\pi}{2},$$

因为 $p_1=\frac{2\pi}{T}$, $p_2=\frac{4\pi}{T}$, 因此,一次諧波在时間上的錯动为:

$$\tau_1=\frac{\varphi_1}{2\pi}T=\frac{1}{8}T,$$

二次諧波在时間上的錯动为:

$$\tau_2=\frac{\varphi_2}{2\pi}\times\frac{T}{2}=\frac{1}{8}T.$$

时間的錯动是相同的,因此曲綫的形狀將沒有改变,但在时間上錯动了$\frac{1}{8}T$。当記录和比較含有一些諧振动的不同过程时,这种时間上的錯动沒有什么关系。当然,这是假定所有的鏈具有同样的ω和Q。

当减小Q时,就可以从对应于不同Q値的φ和γ的依存关系的曲綫族中,选擇这样一根曲綫,这根曲綫在足够長的起始一段是接近于直綫的(圖 61a)。

当过程随时間变化的規律不能用正弦波代表时,由該仪器所重現的过程的品質,在一般情况下,是無法估計的。但对于每一种特别的情况,如果大概的知道了一些量的变化的特性时,可以由(21.1)的簡單計算来作出这种估計。

为了分析仪器的品質,通常用被測量的突变記录曲綫来进行考察。

假如力①(圖77,a)作瞬时的突变,并假設在这以前質量m是靜

① 例如在鏈式示波器中的电流的力。

止的，那末，偏轉 x 將是怎样的呢（圖 77，б）？在这种情形下，計算讀数 $x(t)$ 沒有什么困难。在圖 77，б 上表出了兩根曲綫，一根是对于沒有摩擦的（是 $Q\to\infty$ 的情况下）系統的曲綫。这一曲綫明白地指出了摩擦在仪器中的必要性。沒有摩擦，仪器的指針將作周期为 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 的振动，而它头一下的摆动將比其最后的偏轉 $\frac{F}{k}$ 大一倍。

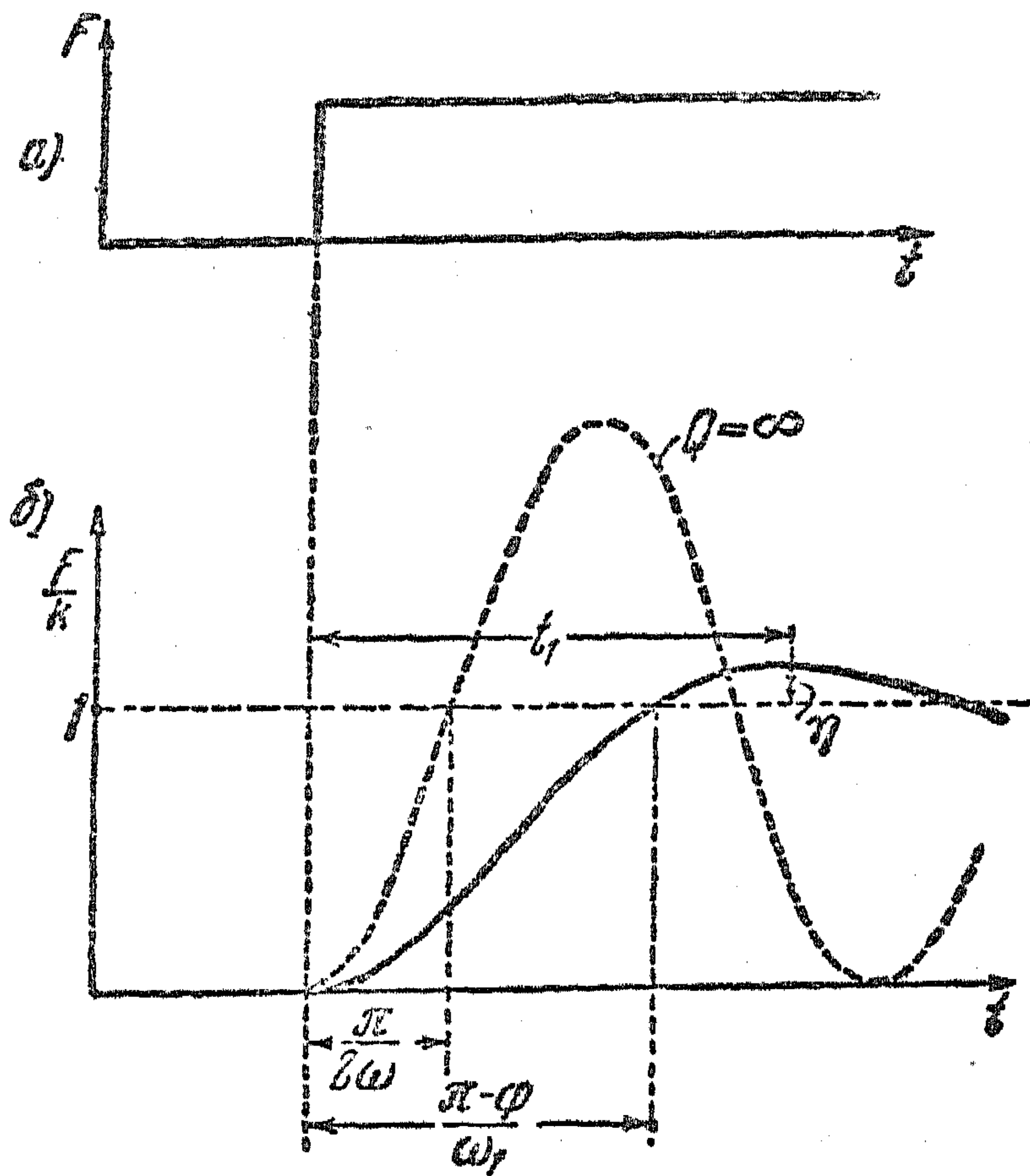


圖 77.

初步的运算指出：

$$x(t)=\frac{F}{k}\left[1-\frac{\omega}{\omega_1}e^{-\delta t}\sin(\omega_1 t+\varphi)\right],$$

其中，和通常一样：

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad \delta=\frac{\omega}{2Q},$$

$$\omega_1^2=\omega^2-\delta^2,\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\delta}.$$

在力的突变以后，經过一段时間 t_1，

$$t_1=\frac{\pi}{\omega_1},$$

第一个最大偏轉發生。

而超出偏轉 $\frac{F}{k}$ 的最大值，用百分率表示为：

$$\eta=100e^{-\frac{\pi\delta}{\omega_1}}\%=100e^{-\frac{\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}\%.$$

在当 $Q=\frac{1}{2}$ 时的振动狀态的边界上，因为 $\omega_1\to 0$，所以 $\eta=0$，以及

$t_1=\infty$. 在这种情况下，仪器的偏轉仅仅在經过了十分長的时間以后才到达$\frac{F}{k}$的值。

注意到当 $Q=1$ 时，$\eta\approx55\%$；当 Q 仅仅等于$\frac{5}{8}$ 时，$\eta=27\%$；于是，假如不希望超过最后值 $\frac{F}{k}$，那末，仪器中的摩擦，在实际上应該和临界摩擦（对应于 $Q=0.5$）相差得極其少。但这时，由时間 $t_1=\frac{\pi}{\omega_1}$ 所标明的仪器偏轉的速度，却大大地增加了。在被測量是冲击的情形下，分析仪器讀数的畸变，对于确定非周期过程記录的畸变是有帮助的。

最后，讓我們指出几种常碰到的准靜态仪器：

1. 鏈式示波器。

2. 光学式接触示振器（原理圖如圖 78 所示），接触示振器的記录有时直接用針刻划在运动的蠟紙上。

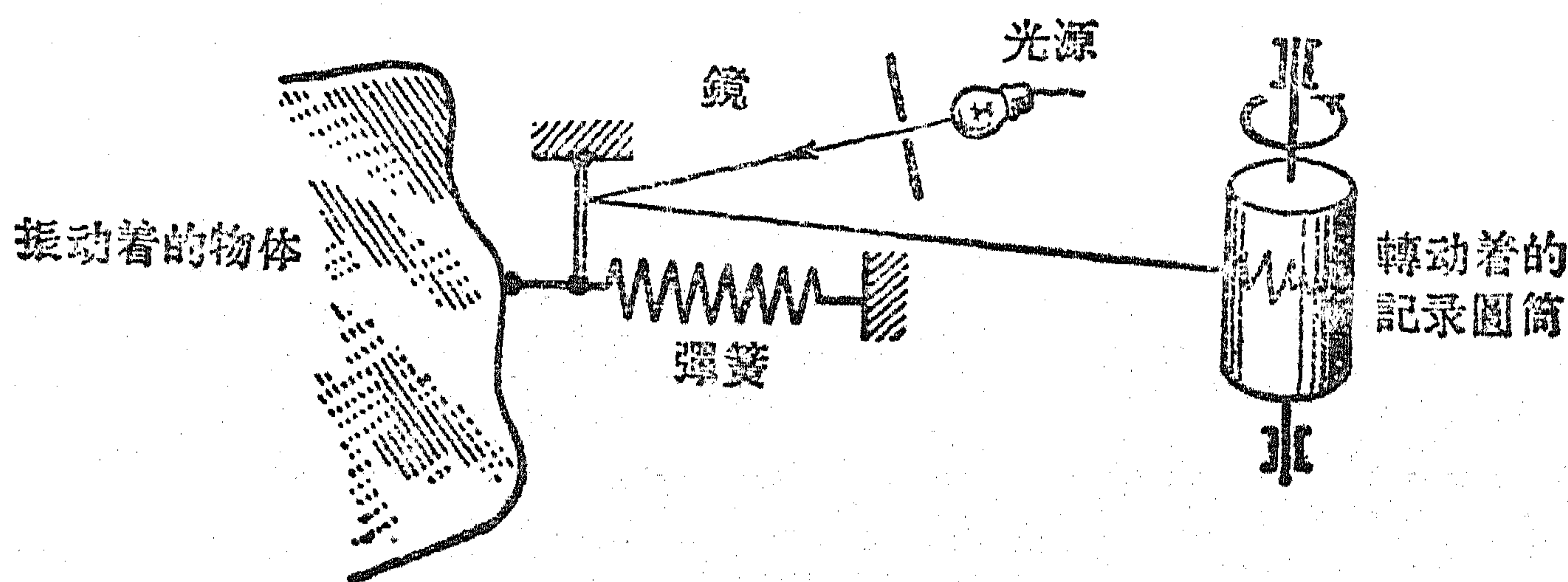


圖 78.

3. 电容式送話器。

4. 压力指示計——压电式、电容式、以及膜片式。

5. 加速度計——为測量加速度用的仪器。

加速度計的簡要作用原理如下：在仪器中有一固定于彈簧上的質量，彈簧自由的一端則剛性地接在希望測量其加速度的物体上，彈簧的形变即指示物体在彈簧形变方向上所感受到的加速度。

§22. 共振仪器

共振仪器是用来仅仅决定一复杂振动中所含有的某一諧振动分量的振幅(或者頻率)。振动式电流計，波長表等等是这一类型仪器的例子。

振动式电流計的讀数与該仪器所調諧的那一頻率的电流振动的振幅成正比；这种类型的各种仪器，在原理上，都是一个Q值很大，即具有銳度很大的調諧曲綫的振动系統。仪器完全不"回答"它所不調諧的其他頻率的振动。

这种仪器的灵敏度与Q成正比。振动式电流計的構造与鏈式示波器大致相同，所不同的只是小鏡在綫上的扭轉振动的固有頻率等于被测电流的頻率。这种类型的仪器适合于测定稳态过程之用。

波長表是一个具有足够大的Q値的电振动迴路。这迴路具有可变电容量的电容器。电容器旋柄的旋轉角一般是在一只刻度盤上讀出，在刻度盤的刻度上指出了当旋柄在該位置时，迴路所調諧的頻率。所求得的頻率的准确度由共振曲綫的寬度决定。因为共振曲綫的寬度 $\Delta\gamma=\frac{1}{2Q}$，所以迴路的品質因数愈大，波長表所测定的頻率的准确度也愈高。

§23. 按照地震仪原理工作的仪器

为了測量鉄路車箱里、船上、飞机上等处的振动，需用特别的仪器，这种仪器称为"地震式仪器"。这些仪器是根据与記录地層振动的仪器——地震仪——完全相同的原理造成的。

在这些場合里，需要相对于"不动的"計算系統来測量物体某一点的振动，而同时物体却沒有可能"依靠"这一系統。因此，仪器的任务首先就是要創建一个相对于"不动的"計算系統是靜止的物

体，然后，就相对于它来测量振动物体的某一点的振动。

这一任务，在原理上是用“悬在彈簧上的質量”来解决的。故实际上是研究一悬在彈簧上、質量为m的荷重的振动，这彈簧又固定在作垂直振动的物体上(圖 79)。

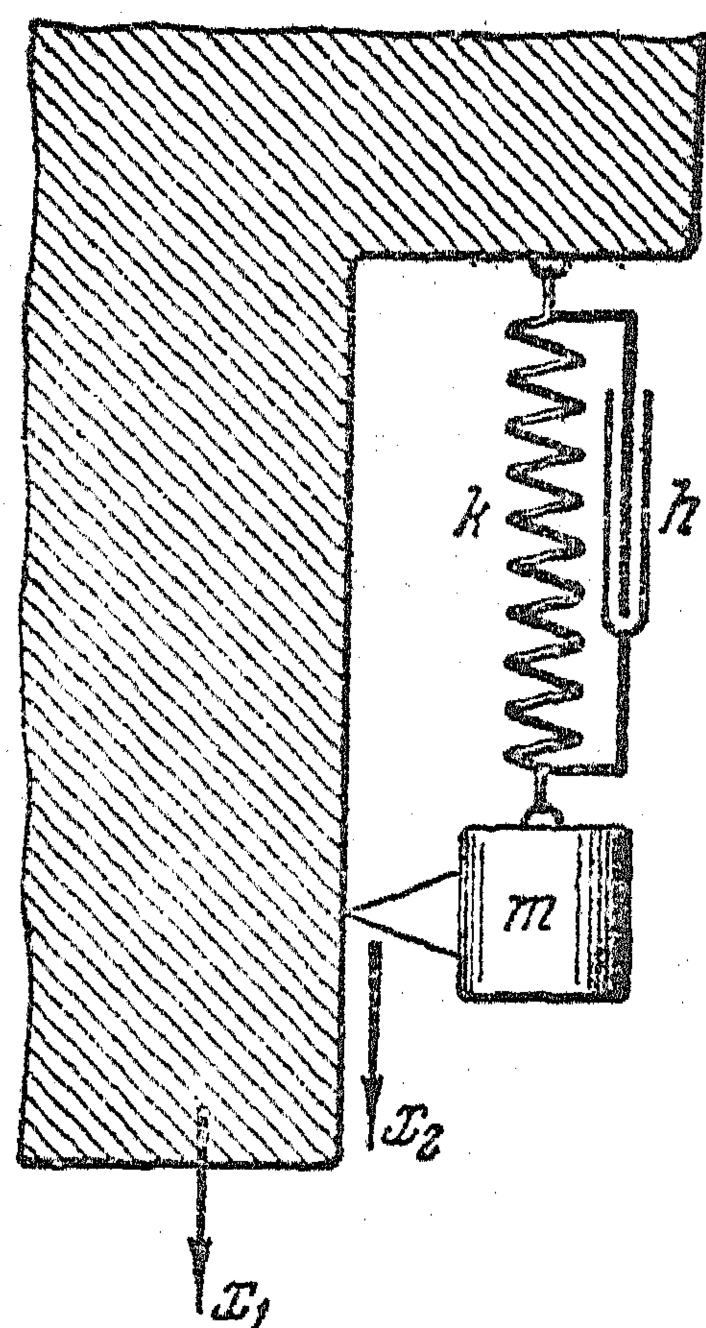


圖 79.

令x_1为振动物体的一点相对于不动的計算系統的坐标，x_2为質量m相对于振动物体的歧离的坐标。彈簧的悬点和記录x_2的刻度尺，也和坐标为x_1的点一样，在运动着。質量m相对于和x_1相联系的計算系統的运动方程式为：

$$m\ddot{x}_2+h\dot{x}_2+kx_2=-m\ddot{x}_1, \quad (23.1)$$

其中加进了一項作用于質量上的慣性力$-m\ddot{x}_1$。

如果物体和彈簧的悬点按照正弦律$x_1=A\cos pt$进行振动，那末，(23.1)的运动方程式將具有下列形式：

$$m\ddot{x}_2+h\dot{x}_2+kx_2=mAp^2\cos pt.$$

根据公式(14.3a)和(15.14)，質量m的振动含有固有振动与受迫振动兩部分：

$$x_2=De^{-\delta t}\cos(\omega_1 t+\alpha)+\frac{A\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+\dfrac{\gamma^2}{Q^2}}}\cos(pt-\varphi), \quad (23.2)$$

以及

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\gamma}{Q}}{1-\gamma^2}.$$

在仪器接入以后，經过一段时間，固有振动將衰减下去。受迫振动的振幅等于

$$X_{20}=A\frac{\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+\frac{\gamma^2}{Q^2}}}. \qquad (23.3)$$

振动振幅对 A 值的比率和 γ 的依存关系如圖 60 所示。

当 $\gamma\gg1$ 时，(23.3) 中的振动振幅 X_{20} 將差不多等于 A，而相位 φ 則接近于 π。假如振动物体的振动頻率 p 比固有頻率 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ 大得多时，那末，振动的記录 x_2 只差一个符号，就完全与振动記录 x_1 相等。

在这种情形下，振动可以設想是这样的：彈簧和振动物体相連的那一头，以很高的頻率振动着，以致荷重保持不动并代表着"不动的計算系統"，所以我們就相对于它来确定位移为 x_1 的物体的振动。

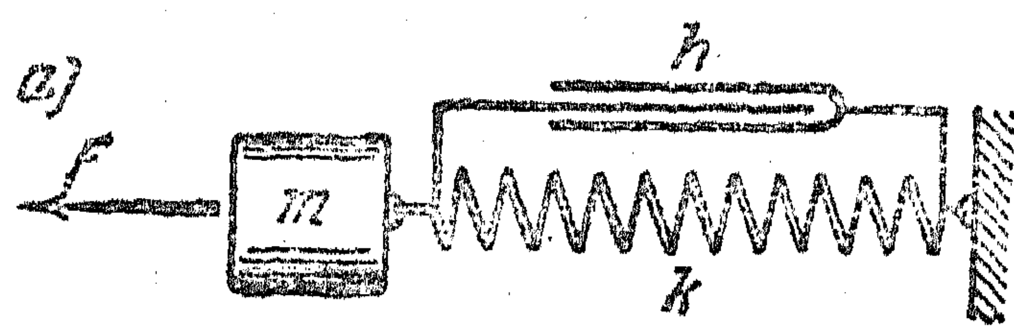
地震式仪器其固有頻率与所測振动的頻率之間的互相关系，剛好和准靜态仪器的这种关系相反。

关于选擇 Q 的問題，是用差不多和准靜态仪器一样的办法来解决的。在無畸变的条件下所記录的頻率是有一定限制的，由振幅曲綫(參看圖 60)可以看出，要減少这种限制，就应当減小 Q，但增加 Q 时，却使相位畸变減小。如果所記录的过程是严格周期性的，那末最好增加 Q；如果有由冲击所产生的不規則的扰动加到振动过程之上(当記录振动时，这常常会發生，例如在飞行的飞机上)，那末，必須讓所記录頻率在低頻頻帶有相位畸变，而把 Q 的値減小到 ≈1。否則，荷重 m 的固有振动会衰減得很慢，这会使振动的記录畸变得很厉害。

仪器以及其他机器在振动基础上的抑振支架，例如飞机上所用的抑振支架，通常是根据地震仪的原理設計的，用彈簧襯墊將仪器这样地固定着，使得在襯墊上的仪器振动的固有頻率小于基础振动的頻率。

§24. 冲击仪器

冲击仪器是用来测定短暂作用力的冲量的。当然，不仅是力，凡是与冲量有規律联系的量，都可以这样测量，例如，冲击电流計就測定通过导体截面的电量



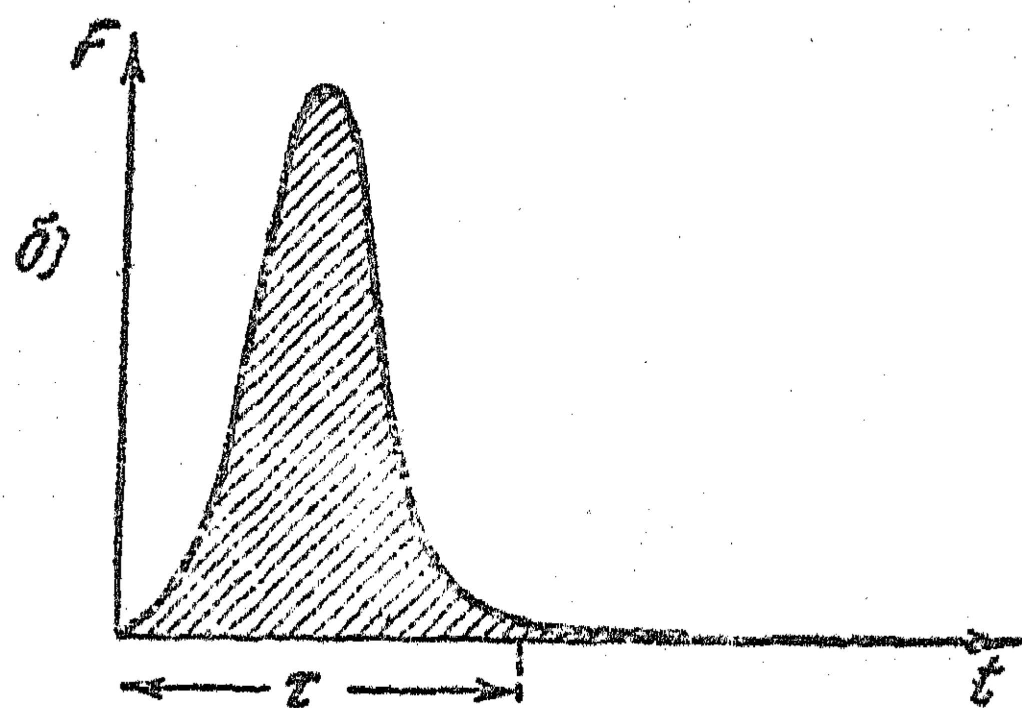


圖 80.

外力F作用于一系統（圖80,a)，該外力随时間的变化如圖 80,$б$所示。假如$F(t)$为已知，那末，不难求得$x(t)$；但是在很多情形中，我們不知道$F(t)$的規律，并且我們也不需要知道它，需要确定的只是等于圖 80,$б$ 划了綫的面积的冲量，或者

$$\int_0^\tau F(t)dt.$$

假如力的冲量是作用于自由的質量m之上，那末，

$$\int_0^t F(t)dt=mv(t),$$

就是，冲量和物体的速度之間只差一个常系数就完全是相等的。可是，在我們的原理圖中，作用于質量上的还有彈力和摩擦力。然而，假如力的作用时間τ与固有周期，即与彈簧上質量的振动周期T比起来，显得很小，此外，τ和"固有时間"$\tau_0=\frac{1}{\delta}$比起来，也显得小，那末，便可以近似的認为在瞬間τ，質量具有速度 $v_0=\frac{1}{m}\int_0^\tau Fdt$

和位移 $x\approx 0$。这以后，質量 m 已經在沒有外力的情况下，在彈簧上进行振动。人們就观察这种振动。当知道系統的参數时，可根据这些振动来决定 v_0，因而，也可决定被測量的冲量。

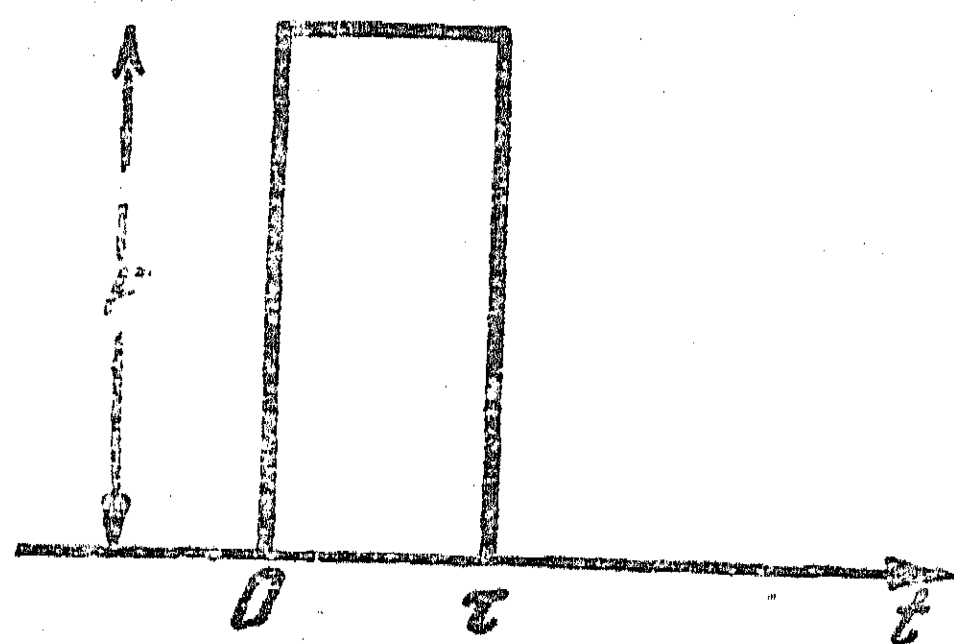


圖 81.

把起始速度 v_0 当作与冲量成正比时，我們所得到的最大誤差值，是可以簡單地估計出来的。令恒定力 F 作用于 τ 的一段时間（冲击时間）內（圖 81）。先不考虑彈簧与摩擦，求出質量的运动；在知道了質量的运动以后，我們再来决定原先未考虑的彈力和摩擦力的大小。

其实，在力作用的时間 $0<t<\tau$ 內，速度 $v=\frac{Ft}{m}$，位移 $x=\frac{Ft^2}{2m}$。在这种运动的情况下，彈力

$$kx=\frac{1}{2}\frac{k}{m}Ft^2=\frac{1}{2}\omega^2t^2F=2\pi^2F\left(\frac{t}{T}\right)^2;$$

因此，在冲击的时間內，彈力小于

$$2\pi^2F\left(\frac{\tau}{T}\right)^2. \tag{24.1}$$

摩擦力 $hv=\frac{h}{m}Ft=2\delta Ft=2F\frac{t}{\tau_0}$，因此它小于

$$2F\frac{\tau}{\tau_0}; \tag{24.2}$$

我們記得：$Q=\frac{\omega}{2\delta}=\pi\frac{\tau_0}{T}$，因此，摩擦力小于

$$2F\frac{\tau}{T}\frac{T}{\tau_0}=2F\frac{\tau}{T}\frac{\pi}{Q}. \tag{24.3}$$

例如，当 $\frac{\tau}{T}=0.01$ 以及 $Q=10$ 的情况下，当撇开彈力时，所得誤差不超过 $2\pi^2(0.01)^2\approx 0.002$；而当撇开摩擦力时，誤差不超过

$2\times 0.01\times \frac{\pi}{Q}\approx 0.006$。

因此，在 $\frac{\tau}{T}=0.01$ 以及 $Q=10$ 的情形下，决定 v_0 时的誤差不会超过 1%。必須注意的是，用这种方法所算出的誤差比实际的誤差要大些。

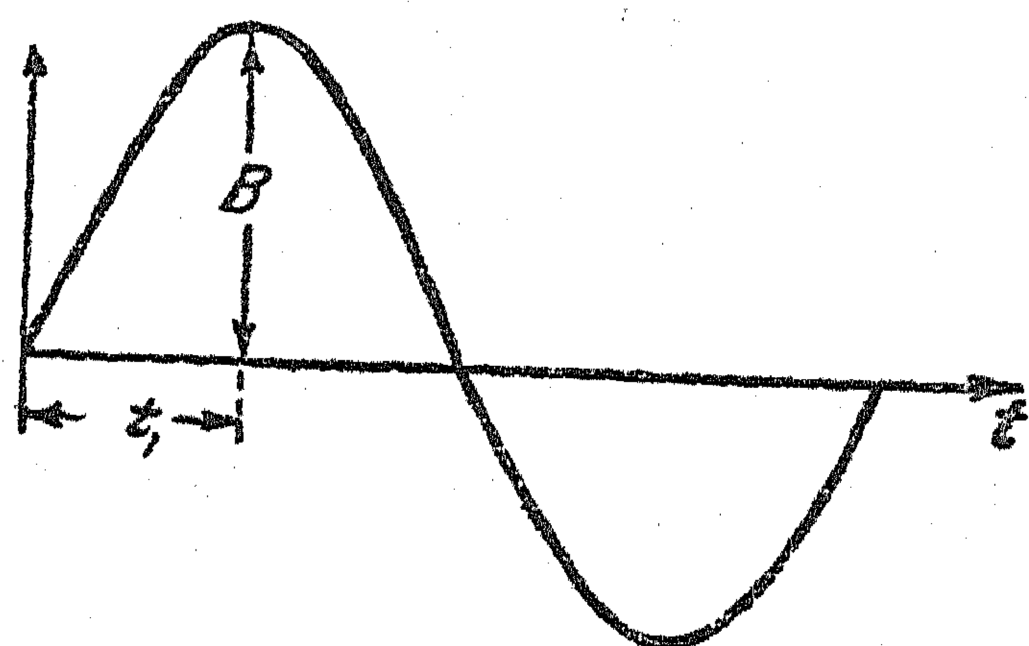


圖 82.

一般是根据質量 m 由平衡位置的第一次歧离，也就是根据 B 値(圖 82)来决定 v_0 的値。

根据公式(4.10)，在冲击以后，質量的位移將等于：

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega_1}e^{-\delta t}\cos\left(\omega_1 t-\frac{\pi}{2}\right),$$

其中 $$\omega_1=\sqrt{\omega^2-\delta^2}. \qquad (24.4)$$

質量走到極端位置 $x=B$ 的那一瞬間 t_1 为：

$$t_1=\frac{\alpha}{\omega_1}=\frac{1}{\omega_1}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1}{\delta}=\frac{1}{\omega_1}\operatorname{arctg}\sqrt{4Q^2-1},$$

其中根据公式(15.3)以及(24.4)，我們曾考虑到，

$$\omega_1^2=\omega^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right).$$

又 B 値：

$$B=\frac{v_0}{\omega_1}e^{-\delta t_1}\sin\alpha=\frac{v_0}{\omega_1}e^{-\frac{\delta\alpha}{\omega_1}}\sin\alpha \qquad (24.5)$$

在这一公式中，除了 v_0 及 B 以外，所有其余的量都是常数，因此，它整个幷入仪器的常数 β，于是运算公式具有下列的簡單形式：

$$v_0=\frac{1}{m}\int_0^\tau F dt=\beta B, \qquad (24.6)$$

其中，根据(24.5)

$$\beta=\frac{\omega_1}{\sin\alpha}e^{\frac{\delta\alpha}{\omega_1}}.$$

可見，第一次歧离与冲量成正比，一般用仪器的相应的校准来决定常数 β（或 $m\beta$），但是，当选擇或計算仪器时，則需要理論的公式。

第五章　共振理論在無綫电技术中的一些应用

§ 25. 选擇性

每一个無綫电接收設备的首要任务在于：要由全世界所有的無綫电台發送至該处的电磁波中，仅仅挑出某一个电台的电磁波訊号，这一电台的节目是我們所希望收听的、記录的等等。仅仅挑出一个电台的訊号而不接收其余电台的訊号，这一特性称为無綫电接收机的选擇性。每个無綫电話發射台發送出用音頻調制了的、一定頻率的电磁波（載波）。

暫时假定每个电台發射出一定頻率的正弦波。一般無綫电台的頻率是在由几百千赫到 20—30 兆赫的范圍內。假定所有的电台同时工作；那末，在接收机天綫中收到的，將是不同頻率的电磁振动的复杂的总合。这些振动的頻譜可以表出如圖 83 所示。

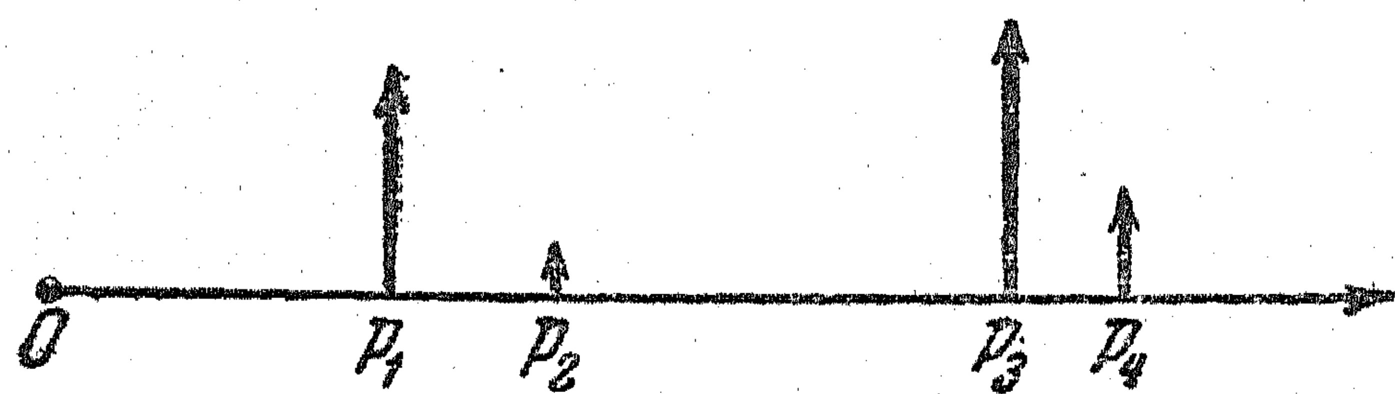


圖 83.

在这个圖上，沿横坐标軸列出頻率，并依一定的标尺用矢表明該頻率的电动势的大小。在天綫中的电动势可以写为：

$$\mathscr{E}(t)=\sum_{n=1}^{N}\mathscr{E}'_{0n}\cos(p_n t+\bar{\varepsilon}_n). \qquad (25.1)$$

我們仅仅要挑出頻率 p_i 的某一电台的振动，而不准其余电台的振动进入接收机。要解决这一問題，必須利用电迴路的共振特

性。訊号所加入的电迴路(圖 84)，一般是接在第一級电子管的栅路中。因此在迴路电容器上的电压 V_c，大家知道，根据(15.16)，將具有下列形式：

$$V_c=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathscr{E}_{0n}}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2+\frac{\gamma_n^2}{Q^2}}}\cos\left(p_nt+\varphi_n+\varepsilon_n\right),\quad(25.2)$$

其中 $\mathscr{E}_{0n}$ 是頻率为 p_n 的电动势的振幅，这电动势是由天綫在迴路中所引起的，$\gamma_n=\frac{p_n}{\omega}$，$Q$ 是迴路的品質因数。相位差 φ_n 按照公式(15.21)决定。但相位差在这一問題上不是我們所感兴趣的。

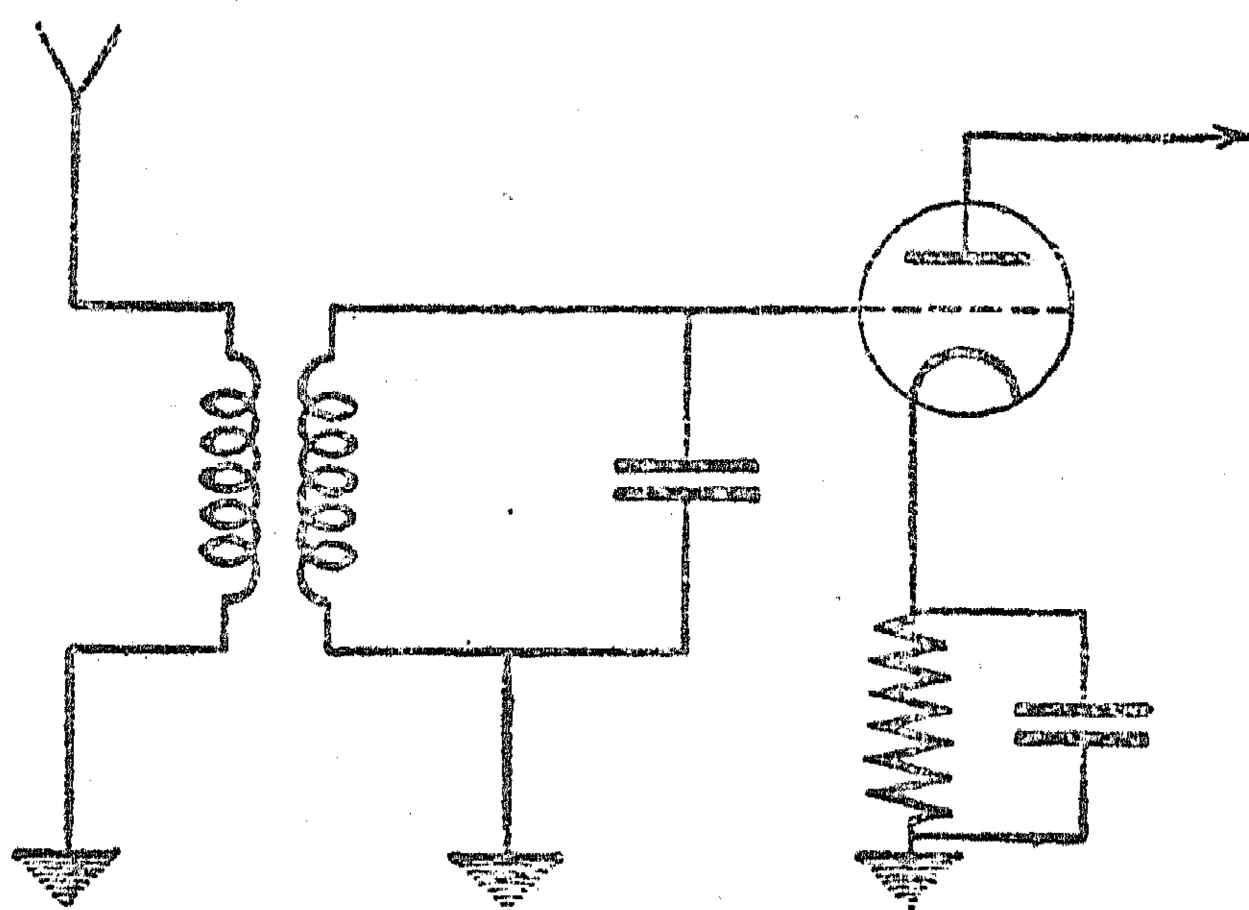


圖 84.

要挑出具有頻率 p_i 的訊号，必須变更接收机迴路的固有頻率并使得它等于 p_i(如一般人常說的，將迴路"調諧"到頻率 p_i)。那末，在迴路中具頻率 p_i 的振动將是这样的：

$$\mathscr{E}_{i0}Q\cos\left(p_it+\varepsilon_i+\frac{\pi}{2}\right).$$

如果 Q 足够大($Q>10$)，那末頻率 p_i 的振动，將比其余頻率的振动占优势，其余頻率的振动將比它小得多。

电振动迴路的共振特性，使得可以挑出一个确定电台的訊号。由此可以看出，迴路的选擇特性仅仅由迴路的品質因数来决定、品質因数愈大，选擇性愈好。

然而，在实际上为了确定接收机有無足够的选擇性，必須知道頻率以及頻率相近的那些电台的訊号的相对强度。很清楚，由一

些频率相近的强电台中挑出一个弱电台的訊号，比由一些鄰近（就频率說）的弱电台中挑出一个强电台的訊号，所需要的迴路品質因数要大得多。如果已經知道所收电台以及鄰近（“干扰”）电台的频率以及訊号强度，那末前面（§ 15）所研究过的共振关系，便为計算迴路的足够大的品質因数提供了全部必需的数据。

例題　兩个电台以下列频率工作

$$\frac{p_1}{2\pi}=700\text{千赫}，\text{和}\ \frac{p_2}{2\pi}=720\text{千赫}。$$

而其中一个訊号比另一个訊号强一倍。

要挑出弱訊号，則所需的接收迴路的 Q 应該是怎样的呢？

假如当接收訊号比鄰近（“干扰”）电台的訊号强到 4 倍时，我們便認为这种接收是滿意的，令 $\mathscr{E}$ 为弱电台的訊号，而 $2\mathscr{E}$ 是第二个电台的訊号。

兩电台频率之間的失諧的相对値 $\Delta\gamma=\frac{2}{70}=\frac{1}{35}$，接收机調諧在弱电台上，由弱电台加于迴路的訊号振幅为：

$$V_{10}=\mathscr{E}Q.$$

由第二个电台加于迴路的訊号振幅，根据(25.2)，为：

$$V_{20}=\frac{2\mathscr{E}}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+\frac{\gamma^2}{Q^2}}}.$$

將 $\gamma=1+\Delta\gamma$ 或者 $\gamma^2\approx1+2\Delta\gamma$ 代入这一公式，那末，

$$V_{20}\approx\frac{2\mathscr{E}Q}{\sqrt{4(\Delta\gamma)^2Q^2+1+2\Delta\gamma}},$$

將根号里的比較小的項略去不計，我們便得到：

$$V_{20}=\frac{\mathscr{E}}{\Delta\gamma}.$$

因此，

$$\frac{V_{10}}{V_{20}}=4\approx\frac{\mathscr{E}\Delta\gamma Q}{\mathscr{E}}=\frac{Q}{35},$$

或者
$$Q\approx 140.$$

这是一个十分大的 Q 的値，这样大的値，在一般具有集中常数的迴路中很难实現。在給定的条件下，所需电台的收听不能借一个迴路来实現。因此，为了得到所需要的接收机选擇性，訊号当通过了第一个迴路以后，还要通过一个(或兩个)調諧在弱电台頻率上的迴路。

現在讓我們把迴路具有足够选擇性的条件，列成数学公式。我們記得，共振曲綫的半个寬度以相对單位表示，等于 $\frac{1}{2Q}$(15.11)。假如兩个鄰近电台的頻率之間相差 Δp，而 p 是所要收听电台的頻率，那末 $\frac{\Delta p}{p}$ 应該比共振曲綫的半个寬度大，或者

$$\frac{\Delta p}{p}>\frac{1}{2Q}. \tag{25.3}$$

由这里得到迴路的品質因数应該大于 $\frac{p}{2\Delta p}$，或者

$$Q>\frac{p}{2\Delta p} \tag{25.3a}$$

是求得迴路所允許的 Q 值的下限的条件，应用这个条件可以保証所需要的选擇性，当然，这是假定頻率鄰近的电台，其訊号的强弱是大致相同的。

§ 26. 無畸变性

在研究选擇性的問題时，我們导出的結論是：接收迴路的 Q 愈大愈好。但假如無綫电台所發出的是調制訊号，并要求接收机迴路中收到的是該訊号的無畸变的重現，則这一結論是不完全正确的。假定电台發出一頻率 p 的、并为低頻(音頻) Ω 所調幅的訊号(圖 85)，圖 85 所表出的訊号，其数学表达式可以写成：

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_0(1+k\cos\Omega t)\cos pt, \tag{26.1}$$

其中 k 是調制系数的值，$k<1$。

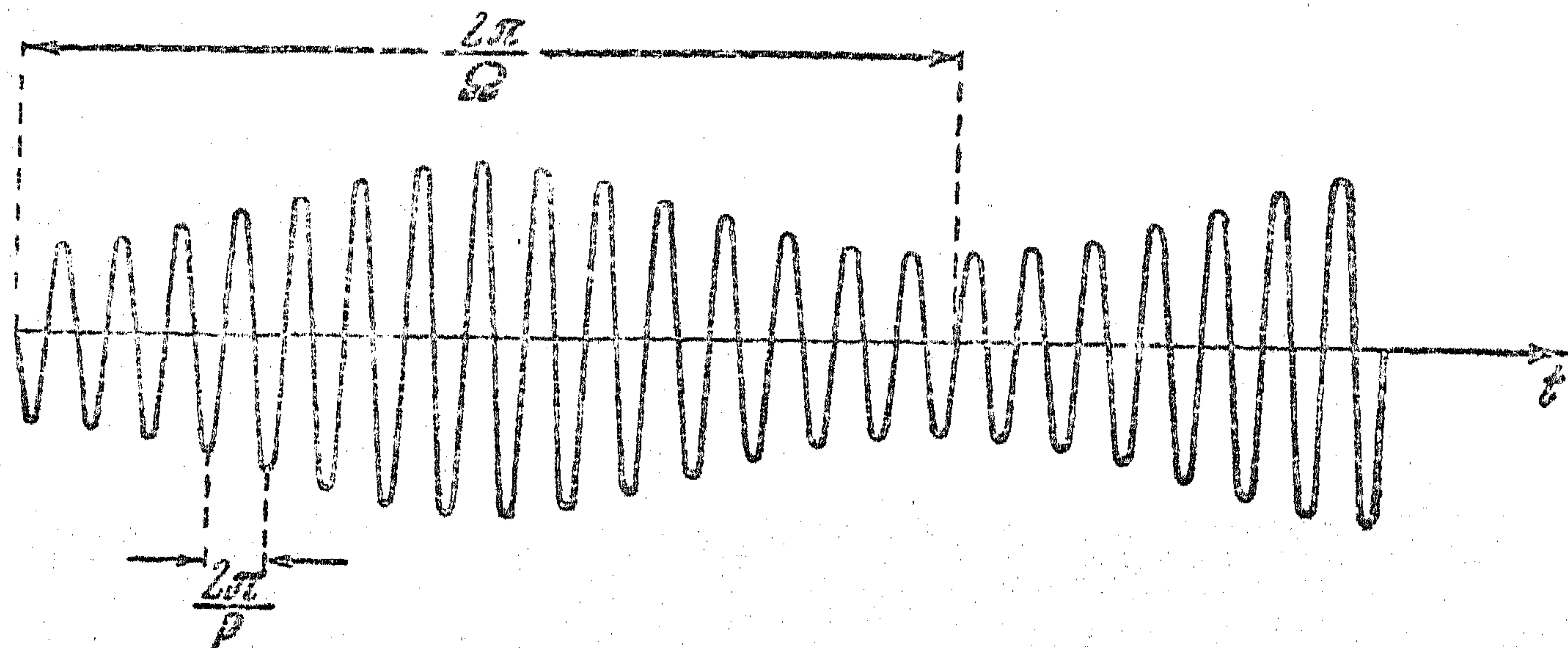


圖 85

在迴路中的振动必須具有与訊号完全一样的形式，或者至少是与訊号相差甚少。

在这种情况下，作用于接收机迴路的是非諧电动势（非正弦电动势），而共振理論是对正弦作用作出的。因此，首先必須將(26.1)的訊号展开为一些諧振动的和。关于这，作起来也很簡單，因为由簡單的三角变換便可推出：

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_0 \cos pt+\frac{\mathscr{E}_0 k}{2}\cos(p+\Omega)t+\frac{\mathscr{E}_0 k}{2}\cos(p-\Omega)t. \qquad (26.2)$$

公式(26.2)表明(26.1)的調幅訊号是频率为 p, $p+\Omega$ 和 $p-\Omega$ 的三个諧振动的和。因此，訊号具有如圖 86 所示的复杂的频譜。频率 p 称为"载波"频率，而频率 $p+\Omega$ 以及 $p-\Omega$ 称为"旁"频率。

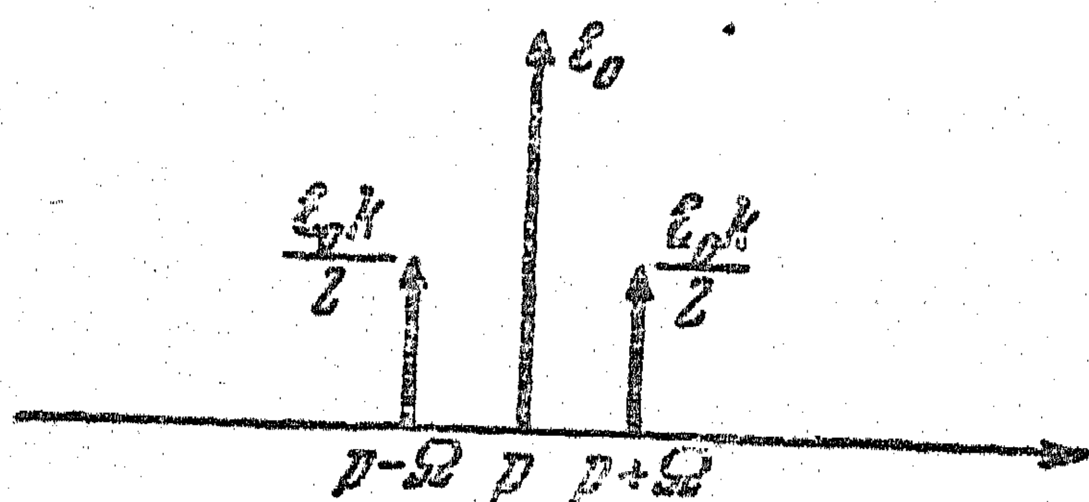


圖 86.

現在已經可以对每一个分量来个別地应用受迫振动的理論。

要迴路無畸变地重現訊号，则在迴路中振动的频譜必須与訊号的频譜相似；同时还要其各个振动分量的起始相位沒有改变。这意味着，在迴路中的每一个諧振动分量的振幅，应該与在訊号中的同样分量的振幅成正比，同时在每个分量中，不应該产

生显著的額外相位差。

在怎样的条件下才可以实現这些呢？注意到迴路是对載波頻率調諧的。

只有当共振曲綫的寬度比 $\frac{2\Omega}{p}$ 大得很多时，这才可能。在这种情形下，所有这三个振动將按頻率分布在共振曲綫頂峰附近某些地方，并且它們的振幅將作差不多同样倍数的变化；在相反的情形下，假如共振曲綫的寬度足够小，那末，就可以由調制訊号的三个分量中挑出任何一个来，于是在迴路中便發生近似正弦的振动——一个頻率的振动。迴路"挑出了"一个頻譜分量，这样就使由电台所發出的訊号完全畸变，要知道在接收机中我們实际上所感兴趣的是低頻(音頻)，而在这种情形下，接收迴路中却什么音頻的痕迹也沒有了。

因此，无畸变性的条件是：

$$\frac{1}{Q}>\frac{2\Omega}{p}, \tag{26.3}$$

或者，共振曲綫的寬度应該比訊号的頻譜寬得多。这一条件也可以写成这样：

$$Q<\frac{p}{2\Omega}. \tag{26.4}$$

条件(26.4)給出了 Q 值的上限。这样一来，Q 愈大选擇性固然愈好，但無畸变性却愈差。实际上必須在这兩个互相矛盾的要求之間，即在(26.4)和(25.3a)之間，取其折衷。

要注意到，当無綫电台發出言語或者音乐的訊号时，所調制的不止一个頻率 Ω。所以，在訊号的頻譜中不是兩个旁頻率，而是与音頻范圍相当的，大概由16赫至10千赫的頻譜的"旁頻帶"。

假如把 Ω 当作最高的音頻頻率，則所有我們的推論都仍然有效。其实，假如可以畸变不大地傳出最高的頻率，那末，由迴路

重現比較低的頻率时，畸变还要更小一些。

無畸变性的条件(26.4)，在高射頻的范圍內，例如，在短波波段內，很容易做到。对于声音訊号，Ω 的最大値是在 $\frac{2\pi\times10^4}{秒}$ 左右。因此在 15 兆赫(波長 20 米)时：

$$\frac{p}{2\Omega}=\frac{15\times10^6}{2\times10^4}=750.$$

$Q<750$ 的条件很容易满足。但在高質量的电視接收机中，需要無畸变地傳送的旁頻帶，由載波頻率向旁扩展达 75 千赫。無畸变地傳送这样寬的頻帶，只有在頻率十分高的無綫电超短波波段中(波長小于 10 米)才有可能。

無畸变性的要求，也可以由另一种比較不严格的方法得到。如果 $\Omega\ll p$ 以及 $k\ll1$，調制訊号便可以看作是一个具有"变变振幅"的"近似正弦"振动。这时的要求是：接收机迴路中的振动必須按照外来訊号的"振幅"变化方式来变化自己的"振幅"。当"振幅"变化得很慢，以致迴路中的过程，在每一瞬間都可以認为几乎是"稳定的"，从而可以近似的把迴路中的振动当作是受迫振动时，是可能有这种变化的。大家知道，假如下式成立，便是这种情形。

$$\tau_0\ll\frac{2\pi}{\Omega},\qquad(26.5)$$

其中 $\tau_0=\frac{1}{\delta}$ 是接收迴路的"时間常数"。或者說，在迴路中振动建立的时間(其値大約为τ_0)比"振幅"变化的周期——$\frac{2\pi}{\Omega}$——要小得多时，便有这种变化。

回想一下，根据(4.7)和(15.3)，

$$\tau_0=\frac{1}{\delta}=\frac{2L}{R}=\frac{2\sqrt{L}\sqrt{LC}}{R\sqrt{C}}=\frac{2Q}{p}.\qquad(26.6)$$

因为迴路是假定調諧在頻率 p，所以 $p=\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。把 τ_0 的表达式代入無畸变性的条件(26.5)，我們便得到与前面(26.4)几乎同样的公式，

$$Q<\pi\frac{p}{\Omega}. \qquad (26.7)$$

对于这样的公式，在常系数上的差别是不关重要的。

然而無畸变性的条件的严格結論与我們剛剛所作出的定性的近似的結論之間，是有着原則性差别的。只有在前一种情形中才可以利用共振曲綫的方程式，在实际上准确地求出畸变，也就是，在任何情形下，如果給了一定的訊号畸变許可値，可以确定 Q 应該比 $\frac{p}{2\Omega}$ 小多少。

§27. 正弦脉冲的接收

为了清楚地表出在迴路中所产生的那些畸变，我們再来研究一个例子——由調諧在脉冲振动的頻率的迴路来接收理想正弦脉冲。

現在来研究在"正弦脉冲"作用下的迴路中的振动。这脉冲是理想的：在某一段时間 T，作用在迴路中的电动势以一串正弦波的形式出現，此后，在一段时間 T 中，沒有作用，电动势等于零，以后类推(圖 87)。

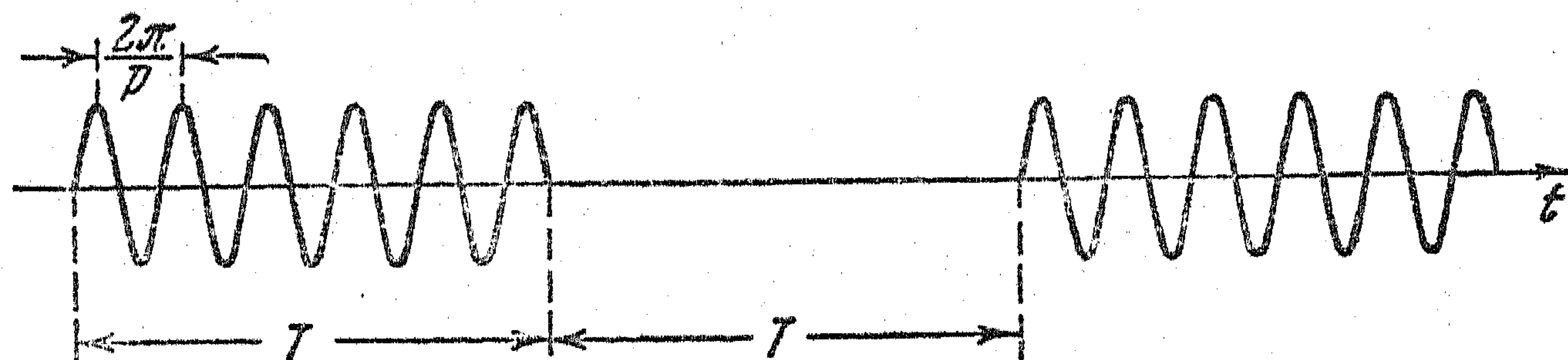


圖 87.

要注意的，是实际上不可能得到剛好像这种形式的訊号，因此

我們便称它为理想的脉冲訊号。

假如迴路也是理想的，即 $Q\to\infty$。讓我們首先看看，在迴路中的振动將是怎样的？假令在固有頻率为 $\omega=p$ 的迴路中，原来沒有振动，而在某一瞬間有脉冲作用于其上。那末，振动的情形將大致如圖 88 上所示的形狀。

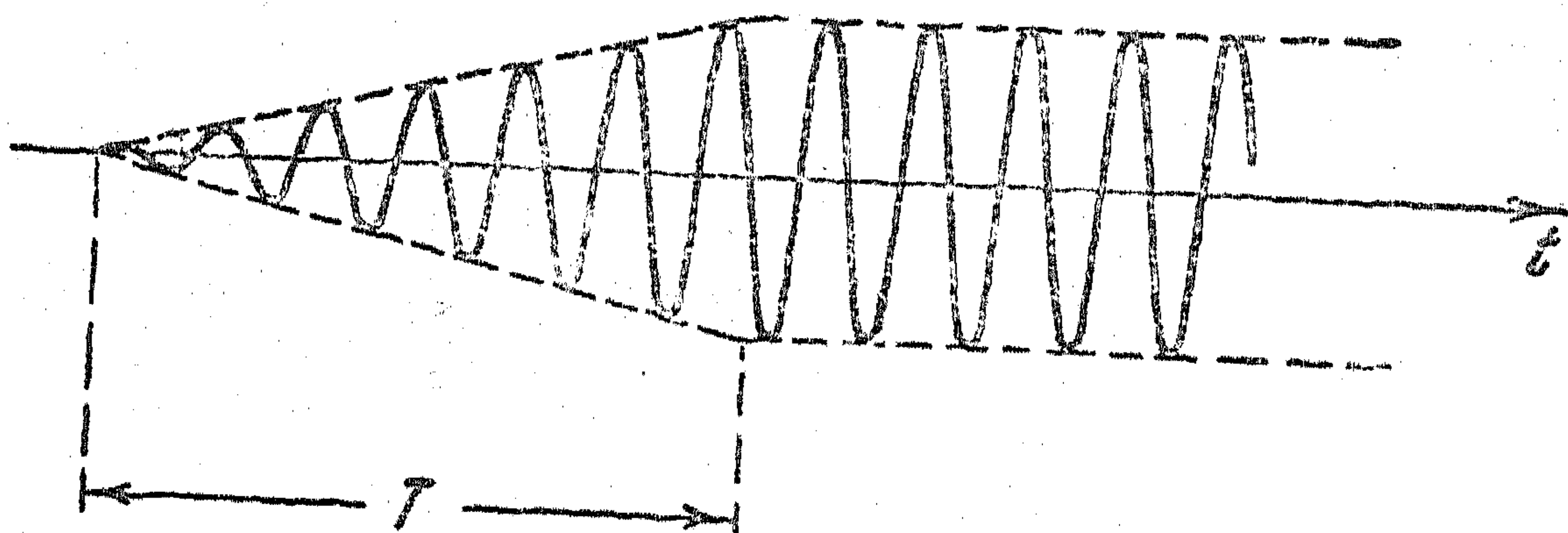


圖 88.

在时間 T 內，迴路中的振动將作"直綫的"增加，之后，在沒有外来脉冲的期間，振动將以恒定的振幅持續着。再往后，从紧接着的一个脉冲的起头开始，或者重新作"直綫的"增加，或者作"直綫的"下降（要看相位是怎样）。很清楚，在迴路中的这种过程是与訊号（圖 87）不相似的，因而在迴路中的振动將完全不是訊号的重現。具有小阻尼的迴路是接近于理想的迴路的，因此它对于無綫电接收机不适用，因为迴路的 Q 十分大时，將引起比較大的畸变。

現在我們来計算一下，当有脉冲訊号接入时，具有一定 Q 値迴路中的振动。假設外电动势 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos pt$，并且在起始瞬間 $V_c(0)=$ $=0$，$\dot{V}_c(0)=0$，讓我們决定在电容器上的电压値 $V_c(t)$。迴路电容器上电压的方程式为：

$$\ddot{V}_c+\frac{R}{L}\dot{V}_c+\frac{1}{LC}V_c=\frac{\mathscr{E}_0}{LC}\cos pt. \qquad (27.1)$$

假如迴路"調諧在共振"，那末 $p^2=\dfrac{1}{LC}$，于是根据(14.3a)，(14.7)以及(14.6)，我們得到其通解为：

$$V_c=\mathscr{E}_0Q\left(\sin pt-e^{-\delta t}\frac{p}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right),$$

或者当 $p\approx\omega_1$ 时，大致为：

$$V_c\approx\mathscr{E}_0Q(1-e^{-\delta t})\sin pt. \qquad (27.2)$$

由此，在迴路中的振动將具有如圖 89 上所示的形式。

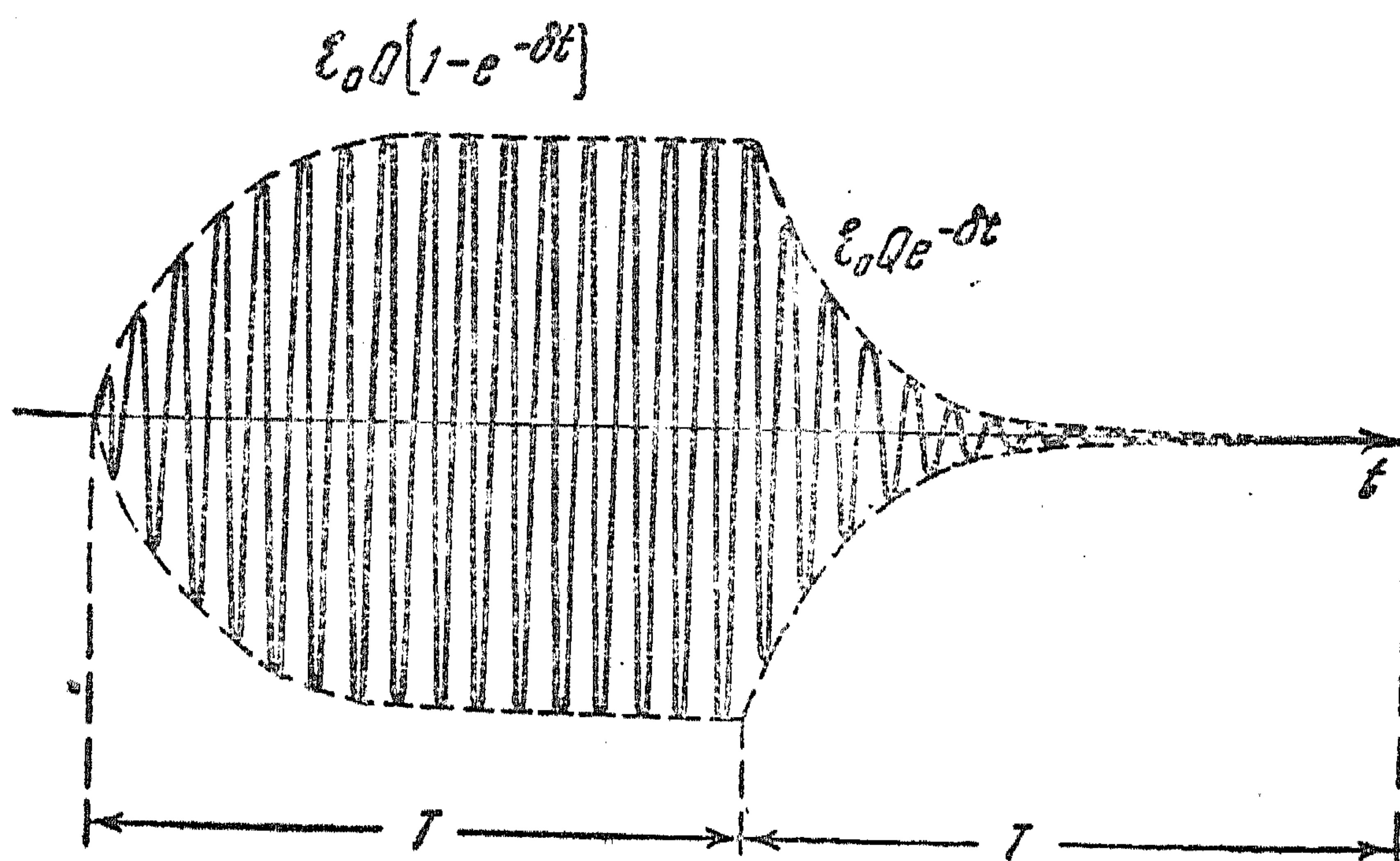


圖 89.

在訊号接入以后，在迴路中的振动將大致按照 $1-e^{-\delta t}$ 的指数規律增加，而在 $t=T$ 以后，在沒有訊号的时間內，振动將按照 $e^{-\delta t}$ 的規律衰減。假如迴路的时間常数 τ_0 比脉冲的持續时間 T 小些，卽：

$$\tau_0=\frac{1}{\delta}=\frac{2Q}{p}\ll T, \qquad (27.3)$$

那末，迴路中的振动將差不多是訊号的准确重現，这不包括脉冲的起始一段与末尾的一段。

条件(27.3)和前面从定性推論所得到的無畸变性的条件(26.5)差不多。只是現在却能够对畸变作出量的估計。

例如，令 $\tau_0\approx\frac{1}{7}T$，那末，在脉冲的末尾，迴路中的振动振幅仅仅与稳定值相差 $e^{-7}\approx0.001$ 这一部分；到下一个脉冲开始以前，振动衰減为脉冲作用末尾时振幅的 0.1%。实际上可以認为迴路

中的振动进行到下一个脉冲开始前为止。于是，当下一个脉冲作用时，又照前面的情形重复一遍。如果 $\tau_0 \approx T$，那末，將有頗大的畸变，在沒有訊号的时間內，振动不会完全衰减掉，因此，对于每一个紧接着的脉冲，都必須重复求解。而我們已講过的計算畸变的方法实际上便不再适用了。

因此，讓我們由适用于一切情形的頻譜方法，来导出这同一問題的解答。为了計算簡單起見，假設訊号含有 N 个周期的正弦波，N 为偶数，那末，訊号的周期將是 $2T=\frac{2\pi}{p}\times 2N=4\pi\frac{N}{p}$，訊号是时間的周期函数，这种函数可以展开为一些諧分量（展开为傅立叶級数）。

为了計算簡單起見，假設当

$$-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant\frac{T}{2} \tag{27.4}$$

时，以及当

$$\frac{2n+1}{2}T\leqslant|t|\leqslant\frac{2n+3}{2}T,\ \text{其中}\ n=1,2,3,\cdots$$

时，訊号由下列函数代表

$$f(t)=\mathscr{E}_0\sin pt,$$

而对于所有其余的时間間隔 t

$$f(t)=0.$$

假如用 $\Omega=\frac{\pi}{T}$ 表示基頻，那末对于所有的 t 可以写成

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\Omega t, \tag{27.5}$$

其中

$$A_n=\frac{\mathscr{E}_0\Omega}{\pi}\int_{-T}^{+T}\sin pt\sin n\Omega t dt=\frac{2\mathscr{E}_0\Omega}{\pi}\int_0^T\sin pt\sin\frac{np}{2N}t\,dt=$$

$$=\frac{\mathscr{E}_0}{\pi N}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\left(\frac{n}{2N}\right)^2-1}. \qquad (27.6)$$

由这一公式很清楚，除了 $n=2N$ 的情形以外，所有的偶次諧波都等于零，这是因为当 n 为偶数时，$\sin\frac{n\pi}{2}=0$。当 $n=2N$ 时，諧波的頻率 $n\Omega=2N\Omega=2N\times\frac{p}{2N}=p$。这也是傅立叶級数的一个分量，这分量具有頻率 p，它的振幅等于

$$A_{2N}=\frac{\mathscr{E}_0}{2}.$$

訊号的頻譜在圖 90 上表出。

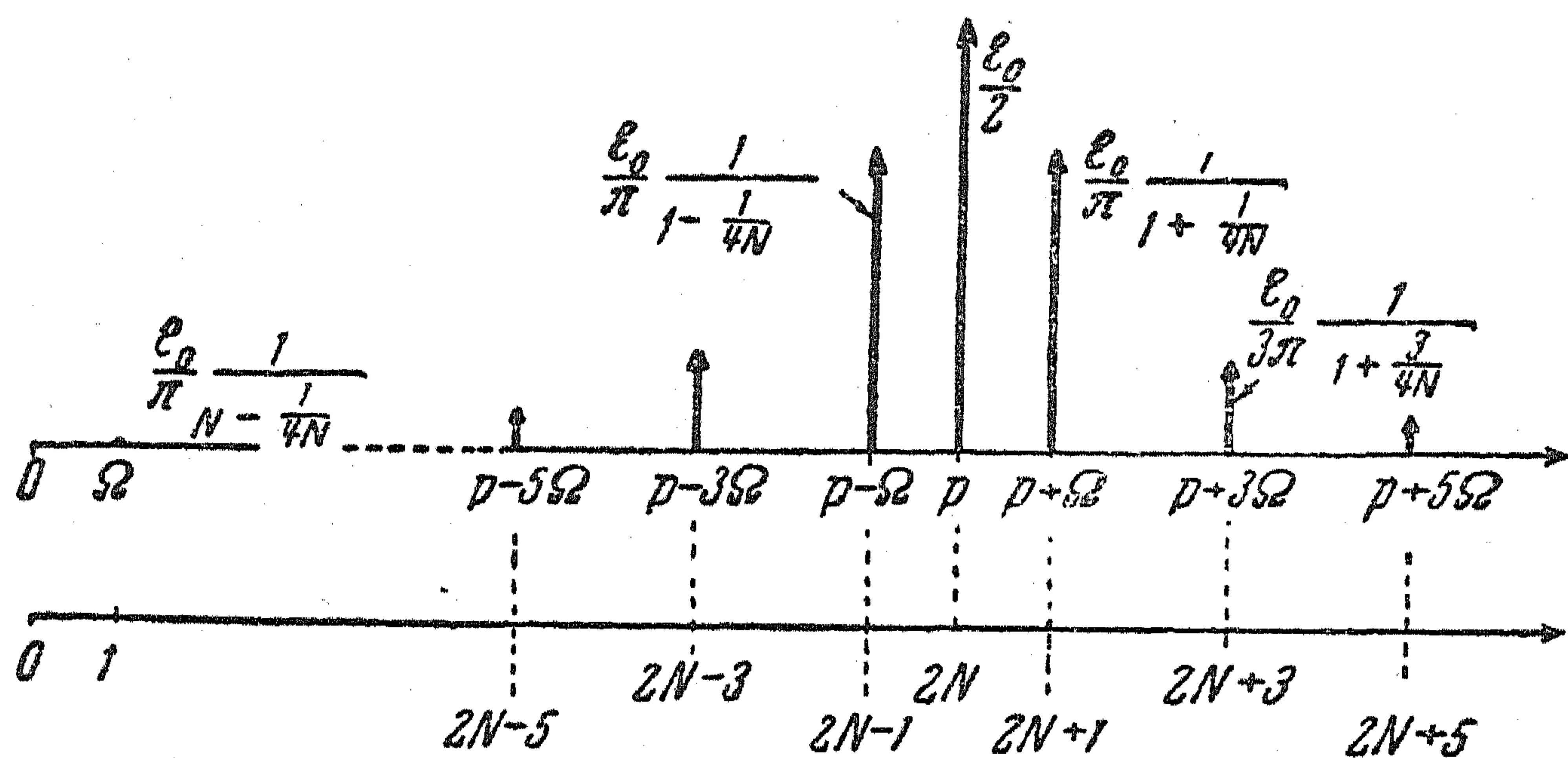


圖 90.

研究頻譜时，我們看到，頻譜延伸在很寬的頻率間隔中，因此，任何迴路都不能准确地重現訊号，畸变是总会有的。然而如果迴路具有这种 Q，以致共振曲綫的寬度大于 2Ω，也就是說，至少有三个基本的頻譜綫是位于共振曲綫的頂峰內，那末，在迴路中的振动固然帶有很大的畸变，但这时已經能將訊号的特点重現出来，由这又一次得出下列条件:

$$\frac{1}{Q}>\frac{2\Omega}{p}$$

或
$$Q<\frac{1}{2}\frac{p}{\Omega}. \tag{27.7}$$

对于迴路品質因数的値，又加上了和前面(26.4)及(26.7)同样的限制。当給定了Q以及p时，这是对Ω值的限制，或者是在發送一个跟着一个的脈冲时，对于發送速度的限制。

初看起来，好像在迴路中的振动与前面圖85上所示的、由頻率Ω調制的振动很相似。然而完全不是这么回事，共振曲綫具有沿頻率由0到∞延展着的"尾巴"，因此，訊号所有的頻譜分量，尽管被削弱得很多，却都会存在于迴路中。并且由于这种分量很多，忽略它們是不行的。我們若是把(27.5)的所有的項(而不是三項!)加起来，便会得到和圖89上所示的同样的曲綫。

因此，当精确地計算在迴路中的振动时，必須用(18.1)中相应的共振因数乘(27.5)的每个頻譜分量，并引入相位的变化，从而得出所有頻譜分量的和。

§28. 調 頻

除了調幅以外，还可能調相和調頻。可以將調頻的訊号当作是調相的訊号。不过，应該將这些概念区别开来，因为对同一个訊号說，調頻和調相是由不同的量来标明的。

正弦調相的訊号具有下列形式：
$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_0\cos(pt+\alpha\sin\Omega t), \tag{28.1}$$
相位按照直綫(pt)規律以及正弦曲綫的($\alpha\sin\Omega t$)規律而变化，这一訊号的頻率則按照下列方式变化：
$$p+\alpha\Omega\cos\Omega t. \tag{28.2}$$

其实，相位对时間的导函数$\frac{\partial\psi}{\partial t}$应該称为訊号$\mathscr{E}\cos\psi(t)$的頻率。如同由(28.2)中看出的，(28.1)訊号的頻率也被調制了，調頻度由下列無因次的系数来决定

$$\frac{\alpha\Omega}{p}<1. \qquad (28.3)$$

系数 α 决定着調相的値，它是用弧度来計量的，并可以为任何値。

有趣的是指出在最初提出应用調頻以后，就有些人認为在調頻中有可能消除选擇性与無畸变性之間的矛盾。当时所持的論点是这样的：假如取一个具有很大 Q 的，即具有大銳度的共振曲綫（圖 91）的迴路，并这样調諧它，使得中心頻率 p 位于共振曲綫的急剧下降部分，那末当訊号頻率作很小的变化时，在迴路中便得到較大的振动振幅的变化。

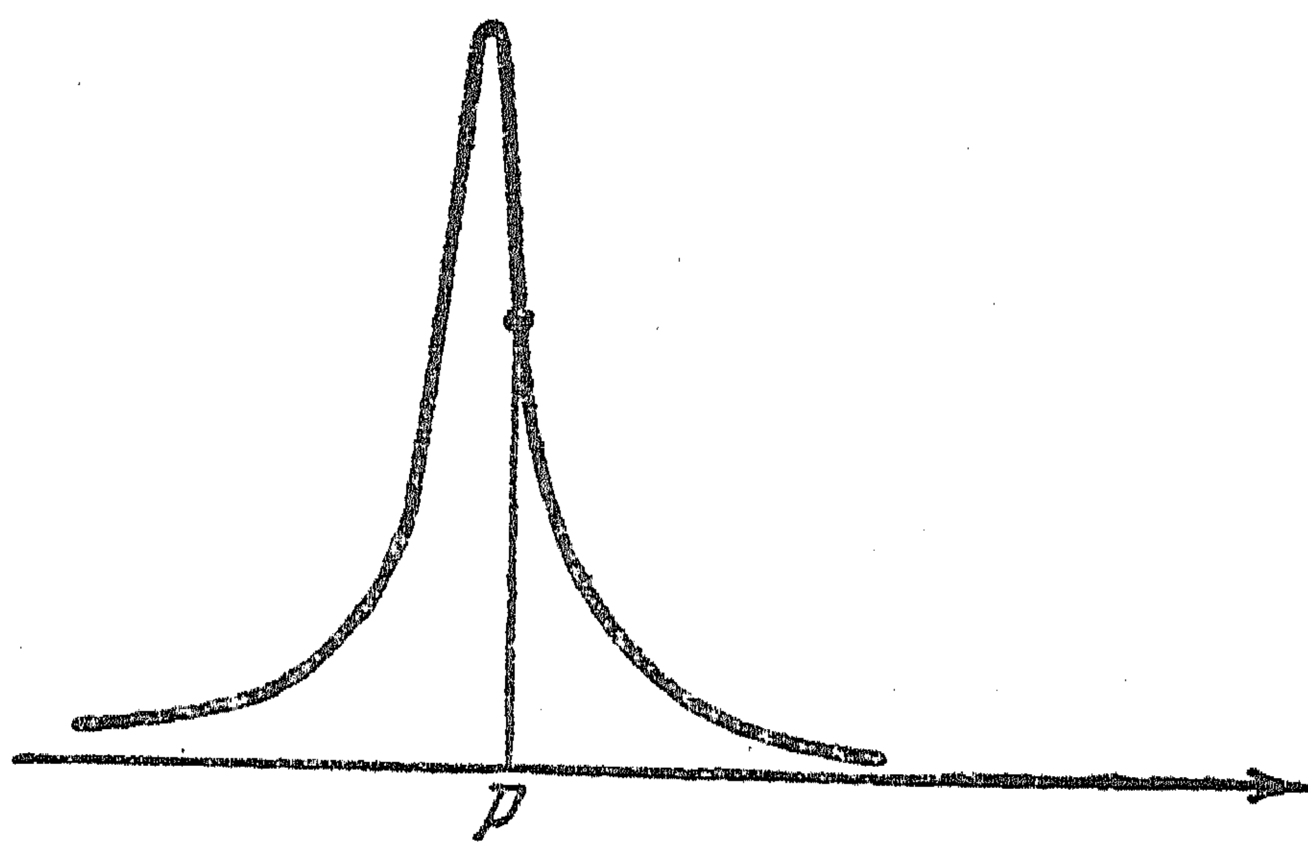


圖 91.

这当然是錯誤的。要知道共振曲綫仅仅对于稳定振动有意义。仅仅是当訊号变动的頻率相当小，也就是当迴路的时間常数 τ_0 比調制周期小时，或者和在調幅的情况一样，在下列情况下时：

$$\tau_0\ll\frac{2\pi}{\Omega}, \qquad \frac{2Q}{p}\ll\frac{2\pi}{\Omega}, \qquad Q\ll\pi\frac{p}{\Omega}, \qquad (28.4)$$

才可以把共振曲綫近似地应用于不稳定振动，所以要使迴路中的振动跟着訊号頻率变化，仍然必須取具有小 Q 的，即具有小銳度的共振曲綫的迴路，因此迴路的选擇性便不能十分高。

根据調頻（或者調相）訊号的頻譜分析，可以推出同样的結論。

（28.1）的調相訊号显然可以写成这样：

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}\cos pt\cos(\alpha\sin\Omega t)-\mathscr{E}_0\sin pt\sin(\alpha\sin\Omega t). \qquad (28.5)$$

可以把上式展开为諧分量。其实，如由貝塞尔函数理論中大家知道的，$\cos(\alpha\sin\varphi)$ 和 $\sin(\alpha\sin\varphi)$ 的傅立叶級数的展开式，具有

下列形式:

$$\cos(\alpha\sin\varphi)=I_0(\alpha)+2I_2(\alpha)\cos 2\varphi+ \\ +2I_4(\alpha)\cos 4\varphi+\cdots$$

$$\sin(\alpha\sin\varphi)=2I_1(\alpha)\sin\varphi+2I_3(\alpha)\sin 3\varphi+ \\ +2I_5(\alpha)\sin 5\varphi+\cdots \qquad (28.6)$$

其中 $I_n(\alpha)$ 是 n 阶第一类貝塞尔函数。所以

$$\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}_0[I_0(\alpha)\cos pt+2I_2(\alpha)\cos pt\cos 2\Omega t+\cdots \\ \cdots-2I_1(\alpha)\sin pt\sin\Omega t-2I_3(\alpha)\sin pt\sin 3\Omega t- \\ -\cdots]=\mathscr{E}_0[I_0(\alpha)\cos pt-I_1(\alpha)\cos(p-\Omega)t+ \\ +I_1(\alpha)\cos(p+\Omega)t+I_2(\alpha)\cos(p-2\Omega)t+ \\ +I_2(\alpha)\cos(p+2\Omega)t-\cdots]. \qquad (28.7)$$

因此，調頻訊号包含着一系列的旁頻 $p\pm n\Omega$，而重現調頻訊号是一个比重現調幅訊号还要困难的問題。調頻訊号一般具有寬得多的頻譜。但当 α 小的时候，远处的（n 很大的）分量会非常小，在重現时，这些分量的畸变对訊号的形狀影响很小。

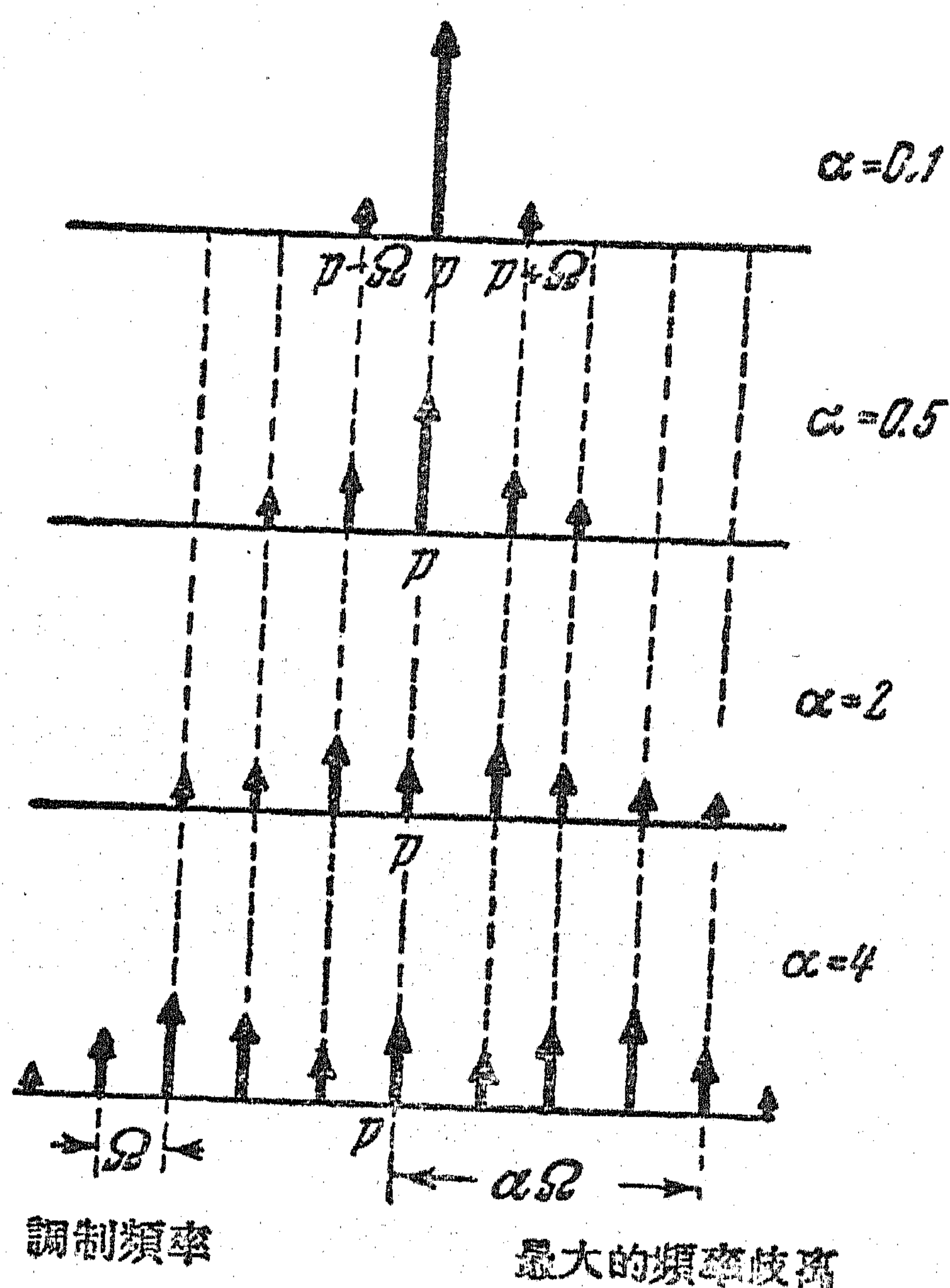


圖 92.

几个不同的 α 値的調頻訊号的頻譜如圖 92 所示。

在微小的 α 的値时，由簡單的三角变换可得到頻譜分量(三重綫)。在这种情况下的頻譜是与調幅訊号的頻譜相似的，然而它与調幅訊号頻譜的区别

在于前者的兩个旁頻分量具有相反的相位。

在圖 92 上可以看出，例如在 $\alpha=4$ 时，迴路的品質因数必須比調幅时的小得多——至少小到四倍。因此，从减小“以太拥挤”的观点看，調頻比調幅不利很多。然而近来在很高的頻率中却宁願采用調頻。这样做，是为了減少在無綫电接收时由外来的偶然干扰所帶来的影响，而要减小这种干扰只有在用調頻的綫路中才可能实現。

§29. 关于“頻譜分解”的評論

在討論选擇性与無畸变性之間的矛盾时，当时曾發生过一种爭論，就是將周期性的量分解为一些諧分量有沒有“物理意义”，例如，对于下列訊号：

$$\mathscr{E}_0(1+\alpha\cos\Omega t)\cos pt,$$

有人認为在研究时引用三个頻譜分量只是提供一些数学上的方便，而沒有任何物理意义。

問題的这样提法是不完全正确的。我們見过，將外电动势分解为一些諧分量或者不这样作，都能够正确地解問題。那么，“調幅訊号”和“三个諧振动的和”都具有同样的物理意义。假如訊号作用于一（具有足够大的 Q 的）諧共振器上，而这共振器是調諧在复杂訊号的某个分量上的。那末，它便可以由訊号中“挑出”該分量。

考査訊号与諧共振器的相互作用时，就可以研究訊号的每一个諧分量。如果我們有这样的“共振器”，它对另一形式的，另一类型的訊号“起反应”，那末，分解为这种分量便具有物理意义。这样的共振器是存在的，因而不仅可能按照正弦和余弦来分解复杂的振动，也可以按照其他的函数来分解它。

作用于諧共振器上的复杂訊号的頻譜分解可以正确地說明物理过程的本質，因此，諧分量具有和訊号一样的物理意义。

第六章　具非綫性元件的最簡單系統中的受迫振动

§30. "非綫性"彈簧的振动

关于含有非綫性元件的系統中的受迫振动問題，是一个复杂的振动理論問題。在这一章里，我們所研究的，是只含有一項非綫性元件的、最簡單的非綫性系統。这种"最簡單"的非綫性系統，具有很大的实际意义。

开始，讓我們来分析一个簡單的例子。設想一个彈簧，它的形变与作用力不成正比。令該彈簧的力——形变特性曲綫具有如圖 93 所示的形狀。就特性曲綫的某一段說，彈簧的形变 x 与作用力 F 的依存关系，可以用例如像下列形式的解析式来表示:

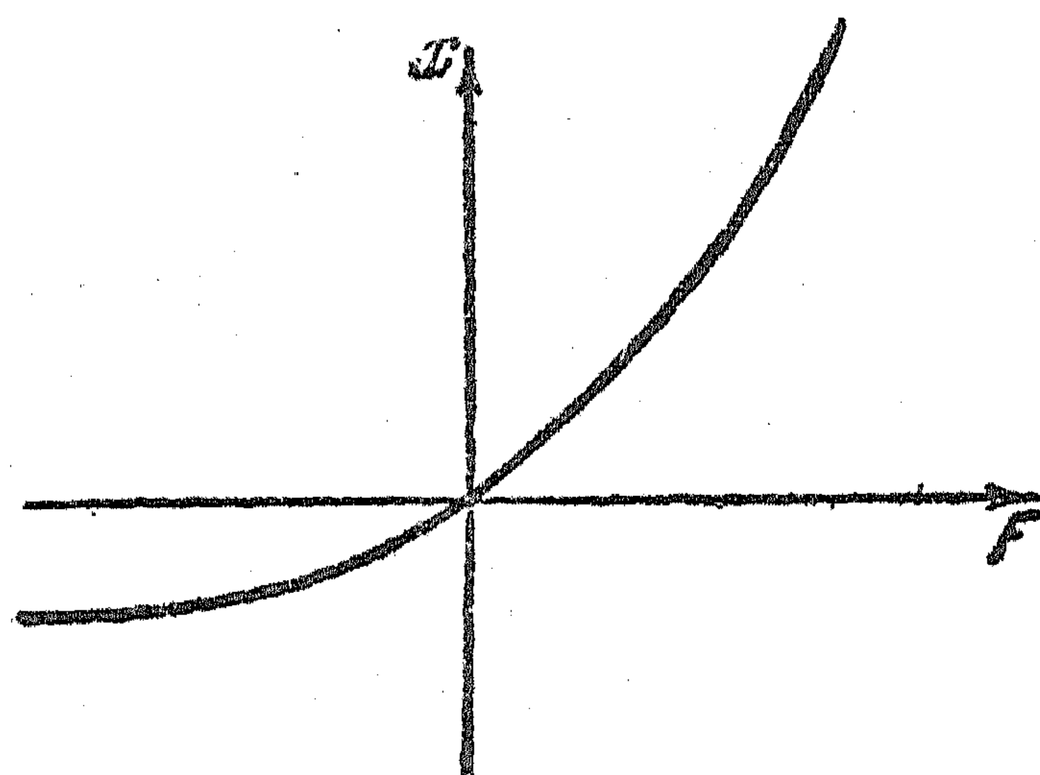


圖 93.

$$x=\alpha F+\beta F^{2}+\gamma F^{3}. \qquad (30.1)$$

現在，假定力 F 随时間按正弦規律而变化，則形变 x 的振动会是怎样呢?

令 $F=F_0 \sin pt$，x 的振动当然是周期振动，但却不是正弦振动。其实，若將正弦力代入(30.1)后，便得到:

$$x(t)=\alpha F_0 \sin pt+\beta F_0^2 \sin^2 pt+\gamma F_0^3 \sin^3 pt=\frac{\beta F_0^2}{2}+$$

$$+\left(\alpha F_0+\frac{3}{4}\gamma F_0^3\right)\sin pt-\frac{\beta F_0^2}{2}\cos 2pt+\frac{\gamma F_0^3}{4}\sin 3pt, \qquad (30.2)$$

振动將在移动了的平衡位置 $\frac{1}{2}\beta F_0$ 附近进行，它是由頻率为 p，

$2p$，$3p$ 的各諧波的和所組成的。諧力作用的結果移动了平衡位置，并产生了原来作用于彈簧上的作用力中所沒有的新頻率 $2p$，$3p$。

要注意的是：如果用某种方法，給 x 一个正弦的变化，那末，由于非綫性，所得到的随时間变化的力 F，將是非正弦的、畸变形狀的。順便提到，在实际上非常不容易給出一个作用于彈簧的正弦力，但使彈簧的一端有一正弦位移則要簡單得多。譬如，这可用一个以勻速旋轉的曲柄来实現。原則上，不能够仅仅給出外力，或者仅仅給出位移，和任何極端的变化一样，它們仅仅在一定的准确度以內反映着現实的系統。

如何可以察覚到彈簧一端是在移动了的平衡位置附近进行振动呢？为了这，須在彈簧的一端接上一"高頻濾波器"。在这种情形下，"濾波器"仍归是在彈簧上的一个荷重，其固有振动頻率比 p 小得多(圖 94)。

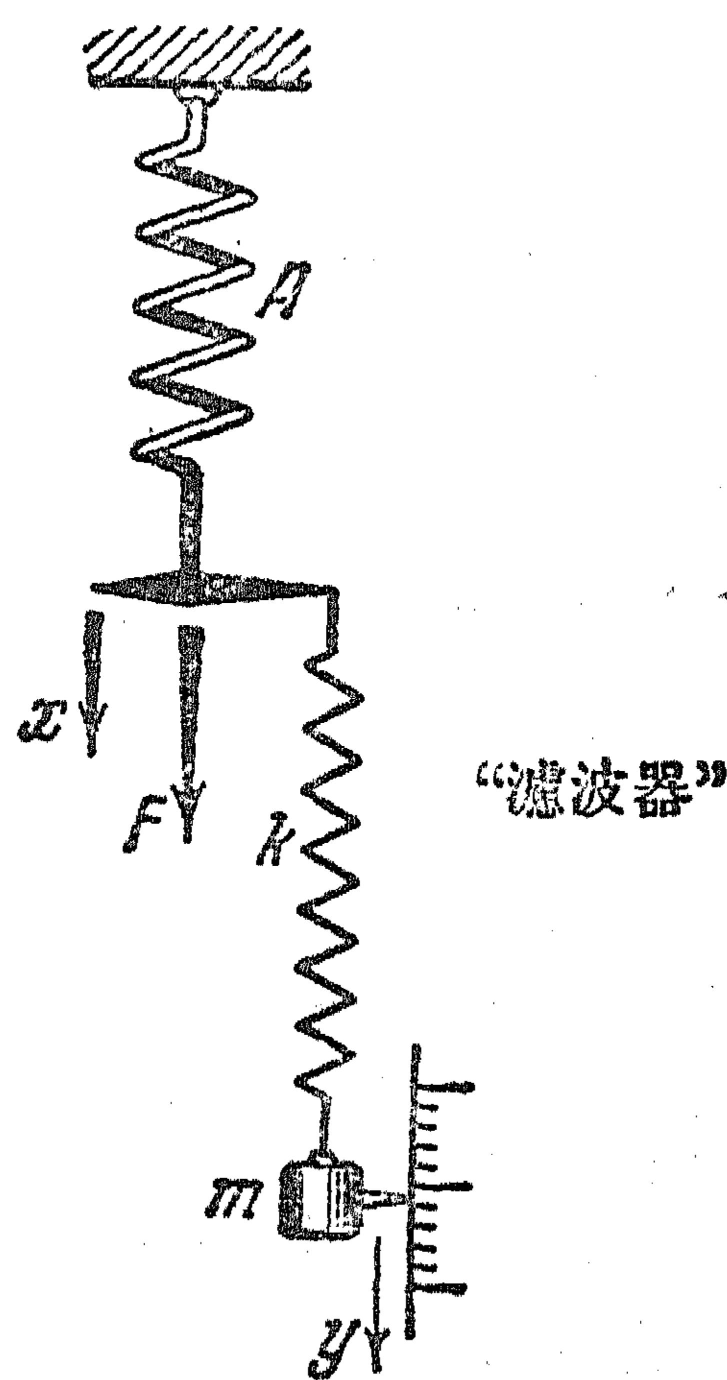


圖 94.

当一諧力作用于彈簧 A 上，彈簧作 x 的非諧振动。当彈簧 A 的一端振动时，在彈簧 k 上的荷重 m，不能作高頻 p 的振动，但它却移动到另一位置，位移 y 代表着这种振动的"直流分量"。

上面研究的振动，在力学中，仅具有純理論上的兴趣，可是在电子学与無綫电技术中，类似的現象(整流与檢波)却有十分重要的意义。

§31. "非綫性导体"和交流电的整流

当导体的电压降与通过其中的电流成正比时，这样的导体称为"綫性导体"，其电流与电压的依存关系圖具有直綫的形狀。在这

种情形下，导体的电阻与电流以及电压的大小無关。

凡电流与电压之間的依存关系圖形用曲綫或折綫表示的导体称为"非綫性"导体。电子管是这种导体的典型例子，它具有單方向的导电性。电子管的板流特性曲綫，即电子管板流 I_a 与板極——陰極間电压的依存关系，如圖 95，*a* 所示。电子管的电阻由下式决定：

$$R_{\text{д}}=\frac{\partial V_{a}}{\partial I_{a}}. \qquad (31.1)$$

这就是說，当电压（及电流）在某一定值 V_a 附近作（足够）小的变化时，电子管等效于一个具有电阻 $R_{\text{д}}$ 的"綫性"导体。对于另一种情形，即当板压（以及板流）作很大的变化，但却始終位于电子管特性曲綫的直綫部分以内的情形，也可以这样說。

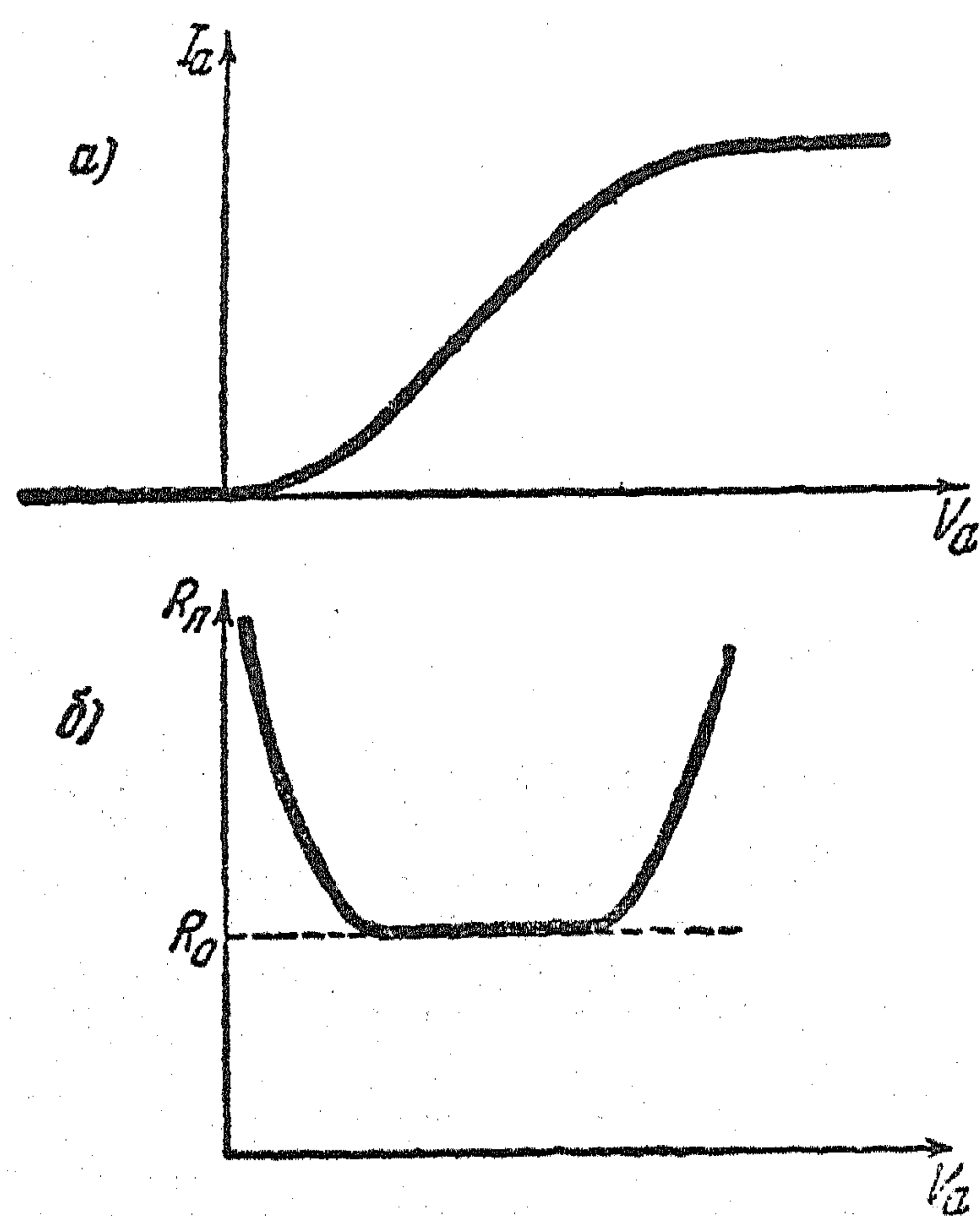


圖 95.

通常把电阻 $R_{\text{д}}$ 称为非綫性导体的微分电阻，电子管的电阻，由很大的値变化到在圖 95，*б* 特性曲綫中部高度的某一最后值 R_0。

試研究二極管，即仅仅含有二个电極——陰極与板極——的电子管中的电流振动。現在假設板極电压按諧規律变化着，电流將怎样变化呢？讓我們先确定特性曲綫上的工作段[①]：再来选定該管板極上的直流电压 V_a 和交流电压的值。

① 假設振动系在电压（及电流）的某一定值的附近进行，且不超出靠近該值的某一段电压（及电流）的范圍，这样一段特性曲綫，称为工作段。

为了便于計算振动，可以用某次多項式来近似地代表在工作段上电压和电流間的变动关系。多項式的項数或者这一多項式的次数，是由所需要的近似程度，以及特性曲綫工作段的形狀来决定的。假設特性曲綫的这一段可以用下列的三次多項式来近似地表示：

$$I_a = I_{a0} + \alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3, \qquad (31.2)$$

其中 V 为板压的交流部分，I_{a0} 为無訊号电流，或者当 $V=0$ 时的电流。

如果給定 $V = V_0 \cos pt$，即在二極管的板極上除了直流电压 V_a 外，还有諧电压，那末，流过电子管中的电流將不是正弦的，并且其直流分量也会有所改变；它等于：

$$I_{a0} + \frac{1}{2}\beta V_0^2. \qquad (31.3)$$

此外，还会产生頻率为 $2p$ 和 $3p$ 的振动（諧波）。各种諧波的振幅的大小由該特性曲綫工作段的形狀以及振幅 V_0 的大小来决定。

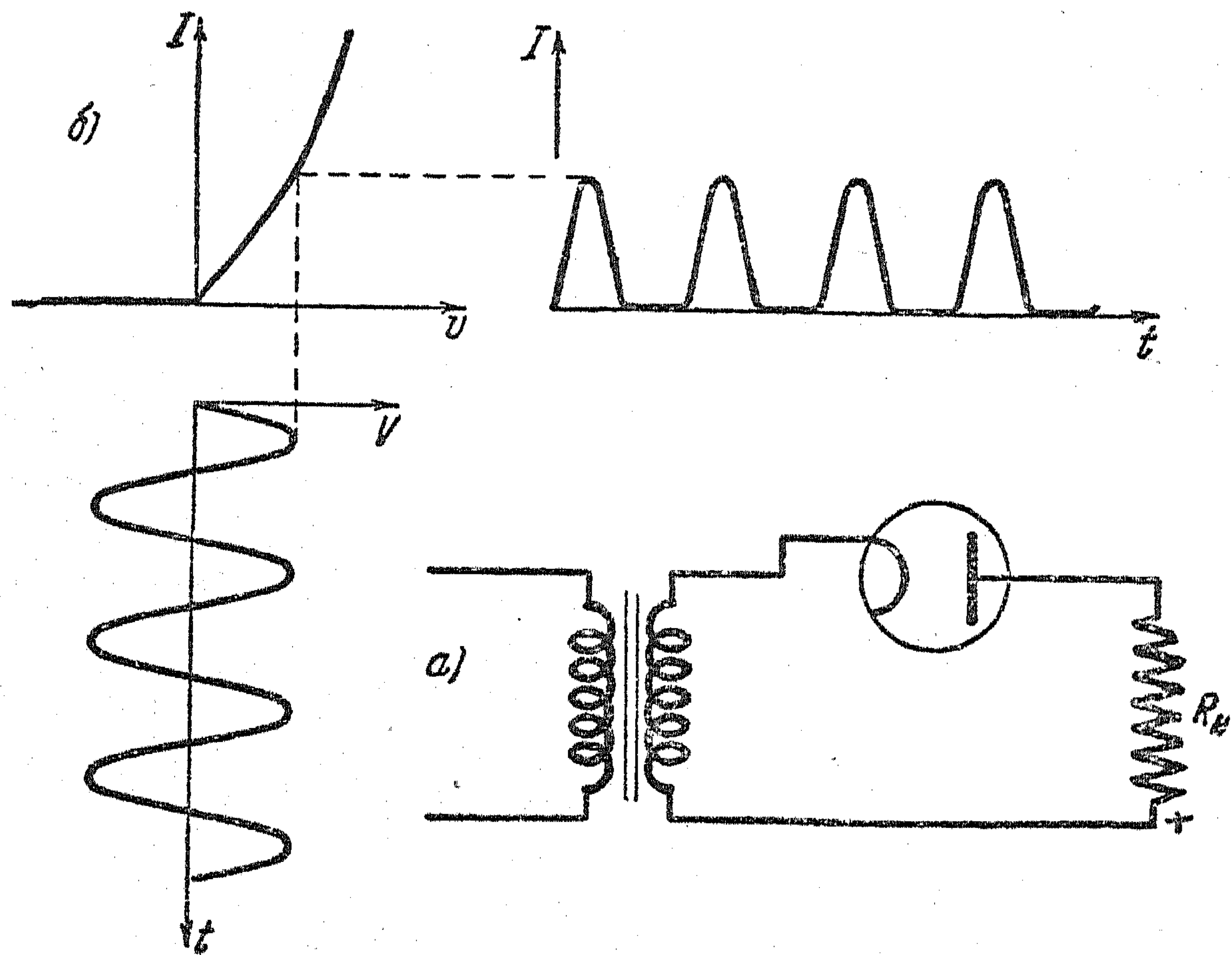


圖 96.

整流器的用途是把交流电变为直流电，在整流器中，就利用着二極管的單向导电性或者特性曲綫的非綫性。如果我們在二極管上仅仅加一交流电压(圖 96)，那末，在二極管綫路中，將有單方向的脉动电流通过电阻 R_{H}；要將这种脉动电流变成直流，就需要用"濾波器"来排除交流分量。为了这一目的，一般在綫路中裝置塞流圈，即具有足够大电感量的綫圈，并裝置与負載并联的电容器(圖

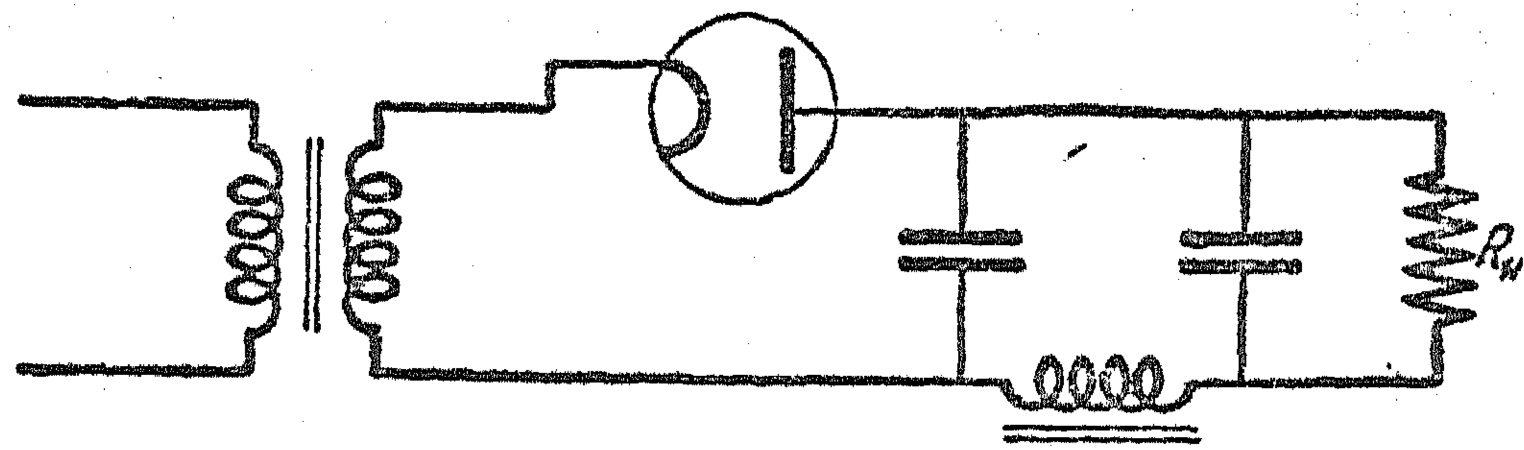


圖 97.

97)，由于交流在綫路的串联負載中遇到很大的电抗 Lp，而在并联綫路中遇到很小的电抗 $\frac{1}{Cp}$，因此，在电阻 R_{H} 上的电压將会大致是直流电压。为了这，还必須使 $Lp \gg \frac{1}{Cp}$。

濾波器設备將帶来不可避免的損耗，因此一般力求能不用濾波器来減小脉动。在全波整流器綫路中脉动就比較小，而在多相整流器的綫路中脉动要更小些。全波整流的綫路如圖 98 所示。在这种綫路圖中，电流在兩个半周內都流过負載。

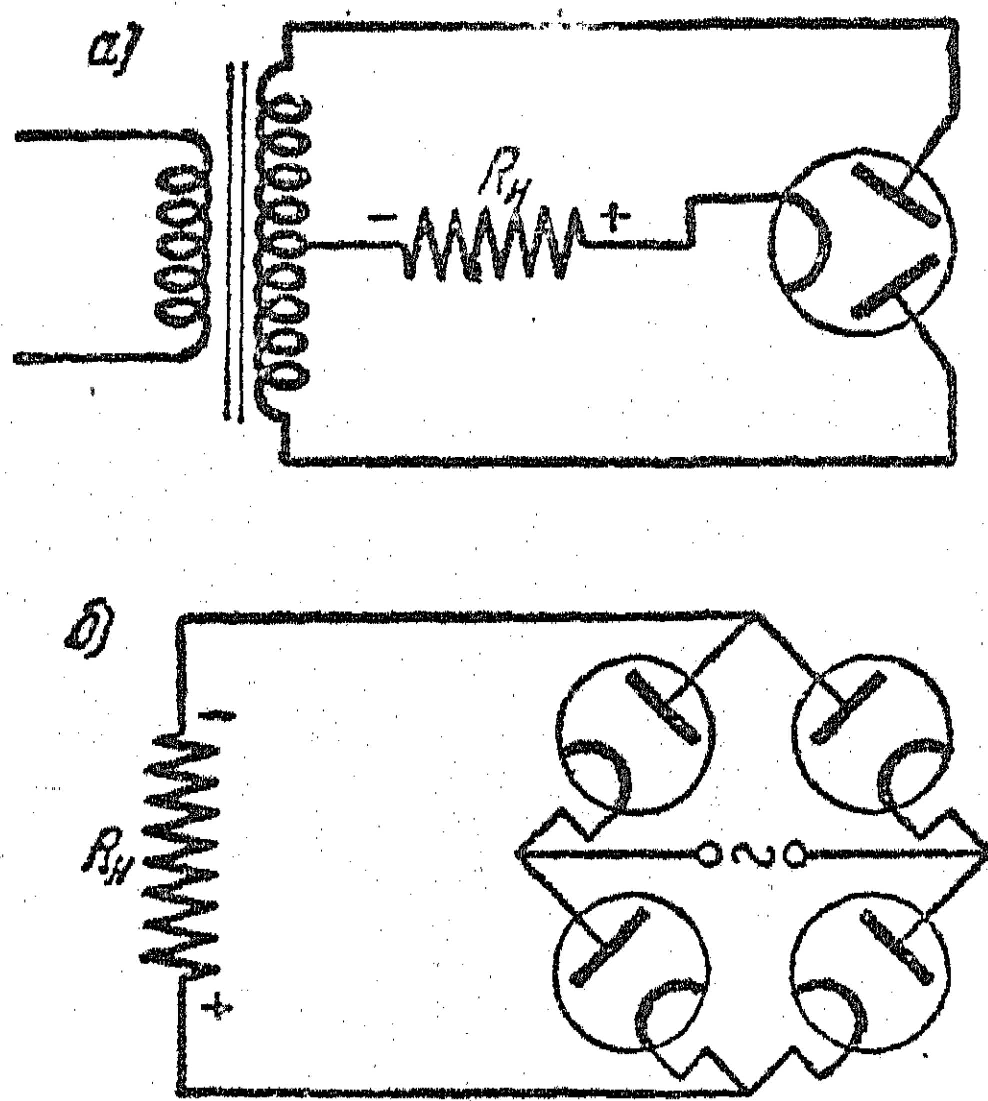


圖 98.

与負載电阻并联的电容器 C 可以作为整流器的濾波器。假如 $pCR_{\text{H}} \gg 1$①，那末，脉动將显著地被平伏下去。例如，如果 $pCR_{\text{H}}=100$，而

① 对交流而言，电容器的电抗 $\frac{1}{Cp}$ 比負載电阻要小得多。

流过二極管的电流的直流分量及其交流分量的振幅具有同样的值，那末，电阻 R_H 上电压振动的振幅將是直流电压的 1%。因为二極管上的电压决定于濾波器元件上的交流电压降，所以精确地計算濾波器是一个相当复杂的問題，然而近似的計算却可以簡單地作出。

§32. 具有 RC-濾波器的二極管整流器的計算

假設二極管特性曲綫的工作段可用几段直綫来代表（圖 99），这样的非綫性特性曲綫可以称为成段直綫的特性曲綫。当板極上的电压为正时，电子管具有一定的恒定电阻値 R_0；当板压为負时，二極管的电阻为無窮大。

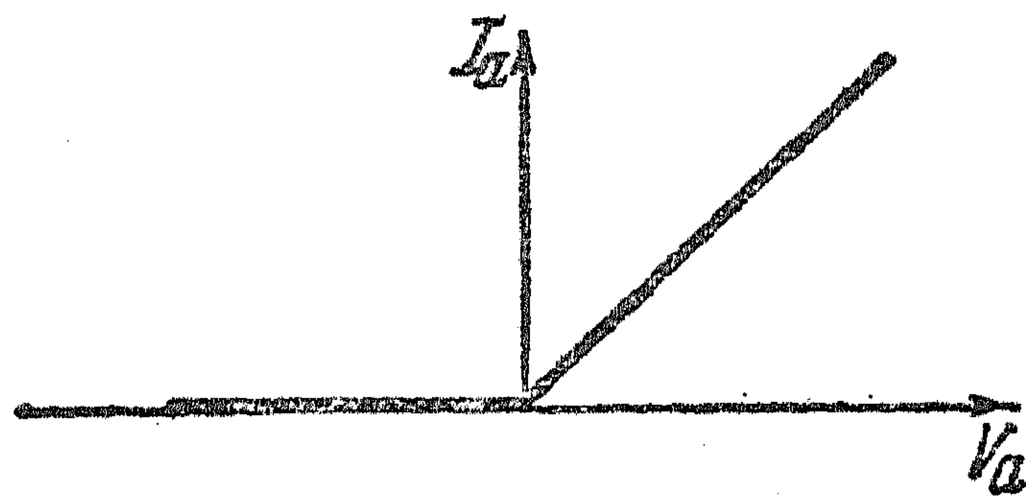


圖 99.

讓我們按照圖 100 所繪的綫路来計算整流器。

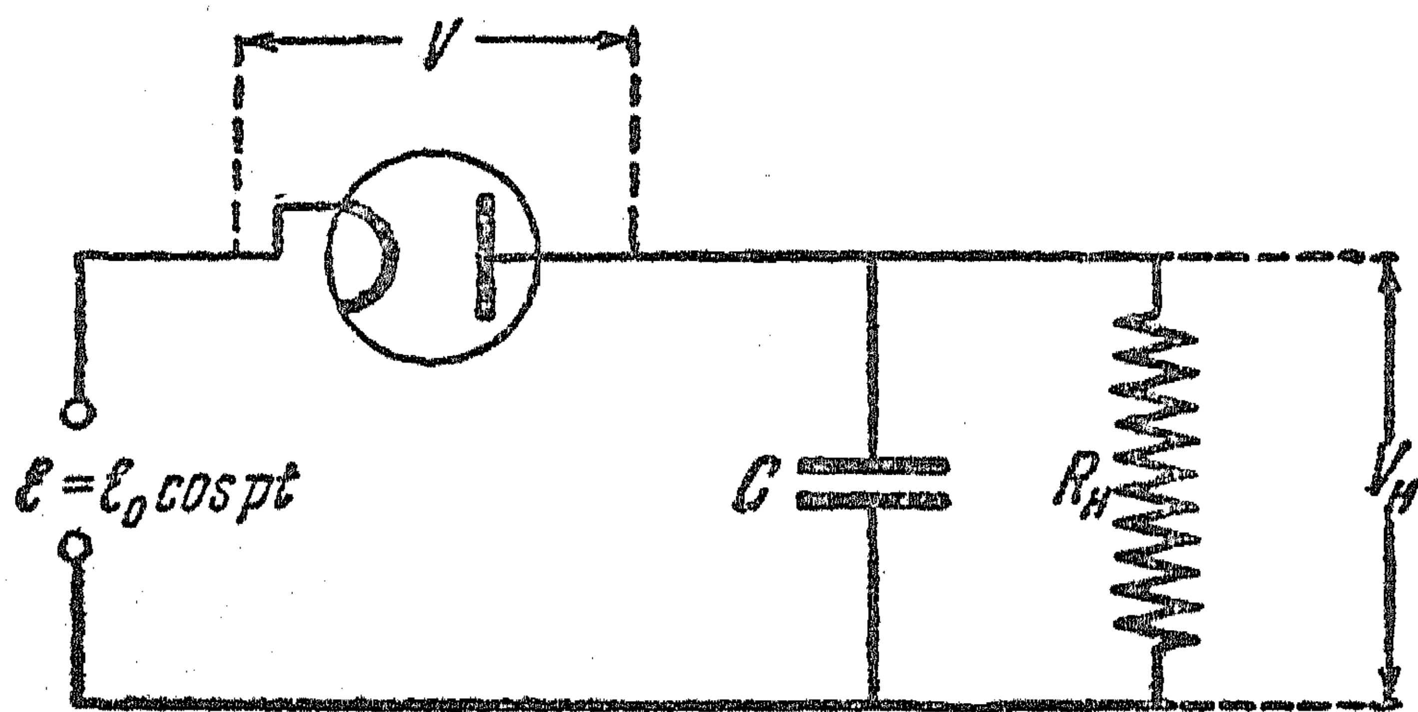


圖 100.

如果很好的維持 $pCR_H \gg 1$ 的条件，那末，在負載上的交流电压降便可以忽略，但在負載上的直流电压 V_H 則不能忽略，而必須加以考慮。

假設流过电阻 R_H 的直流电流为 I_0，那末 $V_H = I_0 R_H$，在二極管上的电压將是

$$V \approx \mathscr{E} - V_H = \mathscr{E} - I_0 R_H. \qquad (32.1)$$

仅仅在那些瞬間，即当正値的 $\mathscr{E}$ 大于 V_H 时，电子管的板極才是正的；在其余的时間，二極管是截止的（圖 101）。

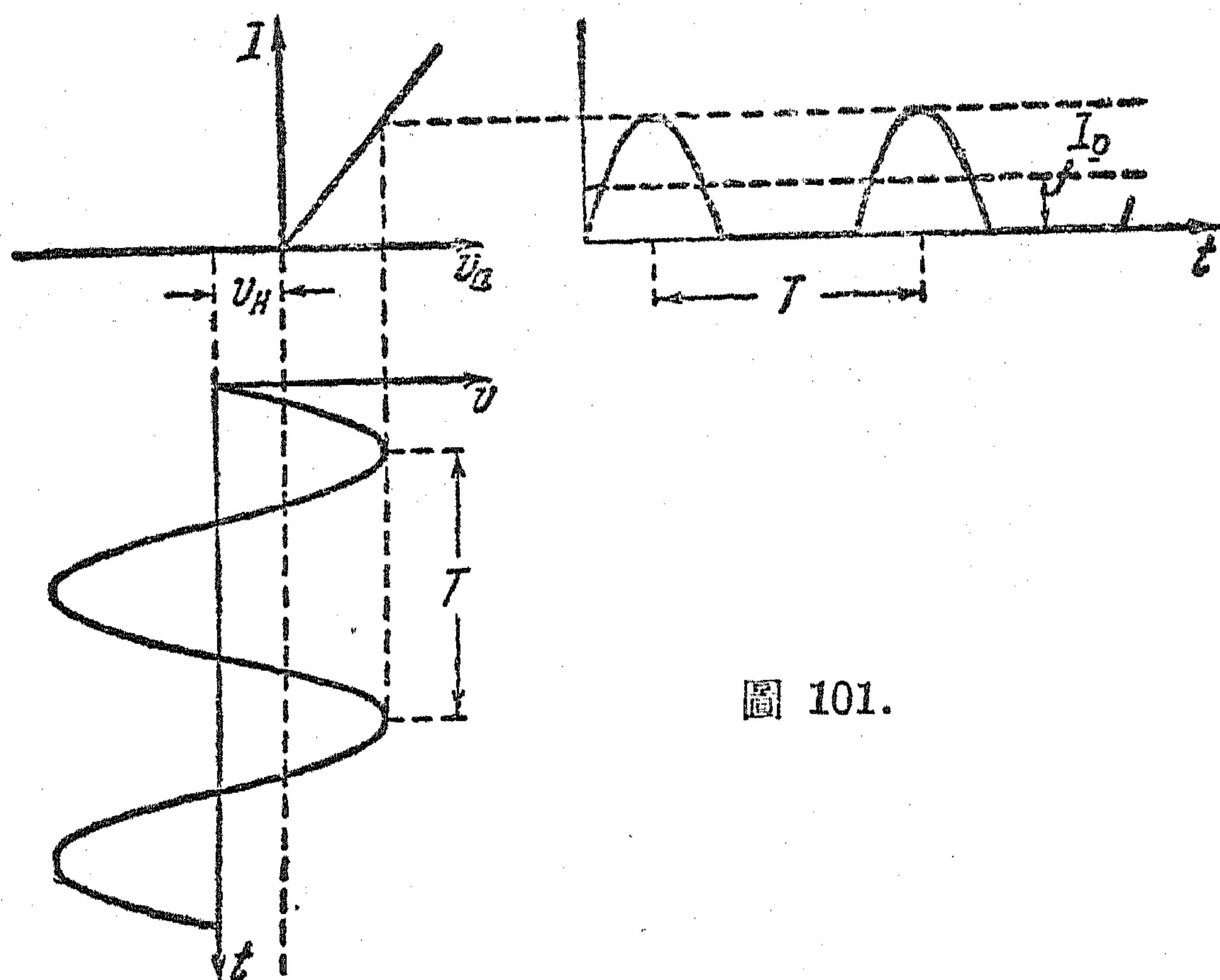


圖 101.

輸入电压正半周的一部分也將"被截掉"，因此在計算时常常引用"截止角"。"截止角"ϑ的定义可由圖102上看出，对于电压和电流說截止角ϑ是相同的，所以应該利用它。

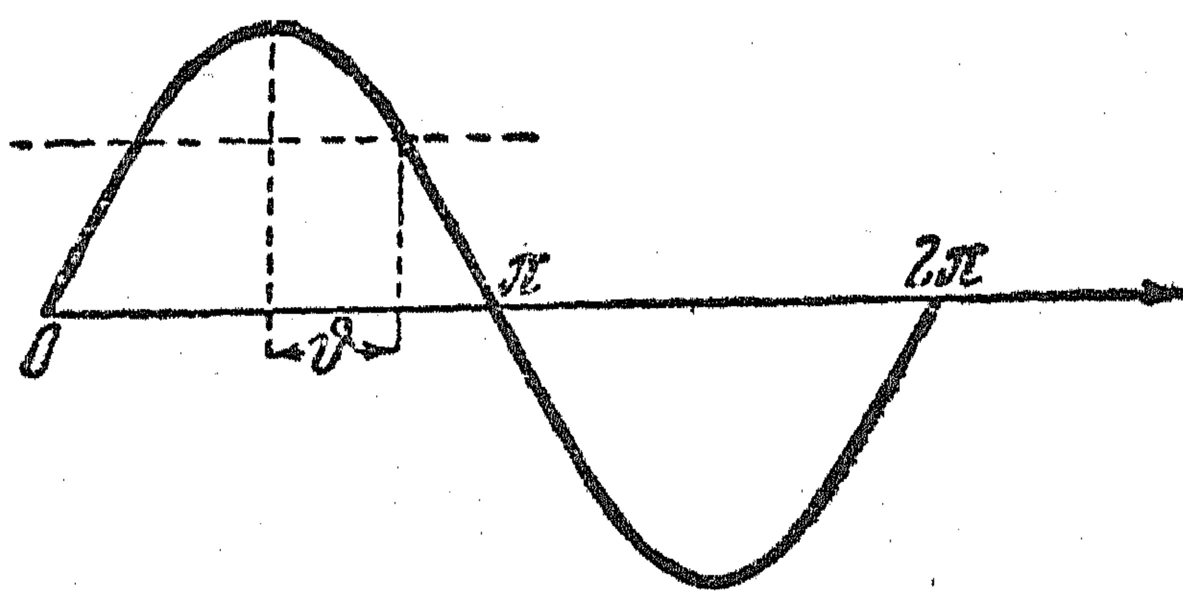


圖 102.

其实，

$$\mathscr{E}_0\cos\vartheta=V_{\text{H}}=I_0R_{\text{H}},\tag{32.2}$$

这可由(32.1)中看出，其次

$$I_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\vartheta}\frac{V}{R_0}d(pt)=\frac{\mathscr{E}_0}{\pi R_0}\int_0^{\vartheta}(\cos pt-\cos\vartheta)d(pt),\tag{32.3}$$

这是因为：

$$\mathscr{E}-V_{\text{H}}=V=\mathscr{E}_0(\cos pt-\cos\vartheta).$$

取(32.3)的积分后，便得到：

$$I_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\pi R_0}(\sin\vartheta-\vartheta\cos\vartheta). \qquad (32.4)$$

公式(32.4)給出了截止角 ϑ 和电流的直流分量 I_0 之間的依存关系，因为式中其余的量都是已知的。將(32.4)和(32.2)加以比較时，我們得到：

$$I_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\pi R_0}(\sin\vartheta-\vartheta\cos\vartheta)=\frac{\mathscr{E}_0\cos\vartheta}{R_{\text{H}}}. \qquad (32.5)$$

由这里就得到根据綫路的参数来求得截止角的公式：

$$\frac{\pi R_0}{R_{\text{H}}}=\operatorname{tg}\vartheta-\vartheta. \qquad (32.6)$$

計算是这样进行的：根据給定的 R_0 和 R_{H} 求 ϑ，然后再来求 I_0 和 V_{H}。对于微小的截止角 ϑ，可以利用簡單的近似公式。即認为在(32.6)中：

$$\operatorname{tg}\vartheta\approx\vartheta+\frac{1}{3}\vartheta^3+\cdots\cdots$$

經过極显明的变換以后，我們得到下列公式：

$$\vartheta\approx\sqrt[3]{\frac{3\pi R_0}{R_{\text{H}}}}. \qquad (32.7)$$

§33. 陰極伏特表①

为了量交流电压(特别是高頻的)，近来广泛地应用着陰極伏特表。陰極伏特表的結構是以电子管的整流作用和放大作用为基础的；它的优点是：讀数不依存于頻率并具有十分大的輸入电阻。將陰極伏特表接入电路时，不会改变电路中的电压分布，或者至少是变动得很少。

現有的关于陰極伏特表的各种綫路結構圖，为数也頗不少。我

① 即电子管伏特表——譯注。

們仅就一个不含放大器的最簡單的綫路，来研究其作用原理，这綫路如圖 103 所示。显然，这綫路与圖 100 所示的整流器綫路沒有区别。如果 $RCp \gg 1$，$R \gg R_0$，那末，根据(32.7)，$\vartheta \to 0$，因此，$\mathscr{E} \approx I_0R = = V_H$。

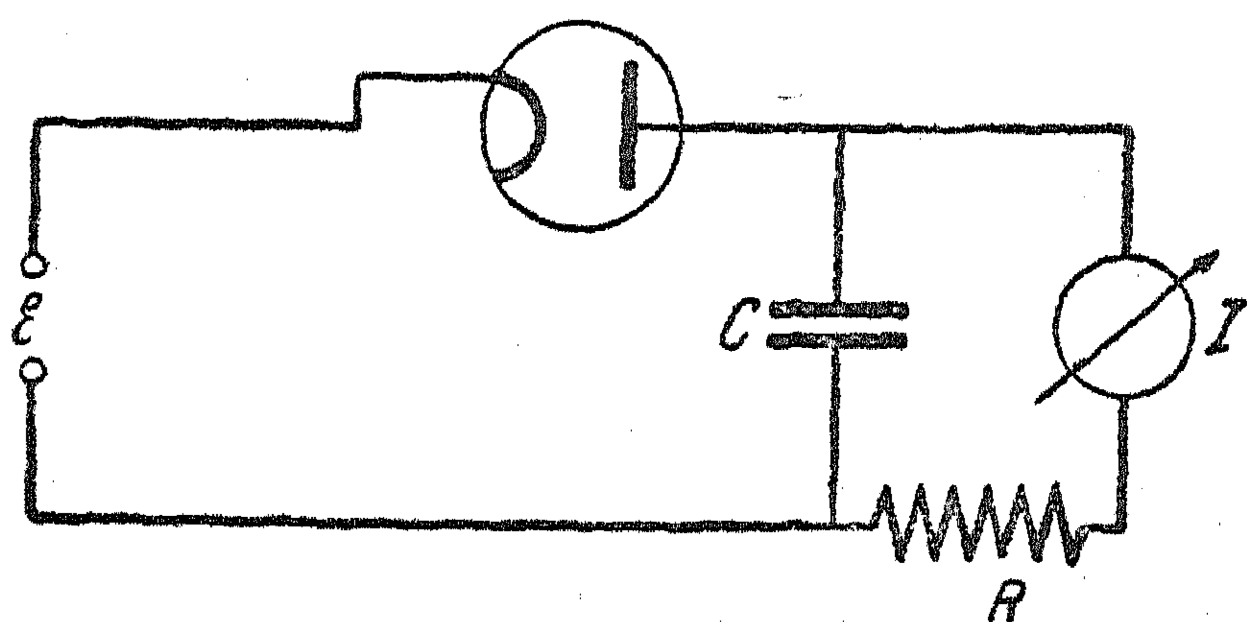


圖 103.

当 RCp 比 1 大很多时，那末伏特表可以認为是“巅値”伏特表，其中 p 是“巅値”电压的頻率。在电阻上的电压降会差不多等于正半周(对板極說)的最大巅値电压。显然，假如按照标志正确地連接伏特表，則这种伏特表(圖 103)也可以量直流电压。常常遇到另一种綫路的陰極伏特表(圖104)，它仅适于量电压的交流分量。

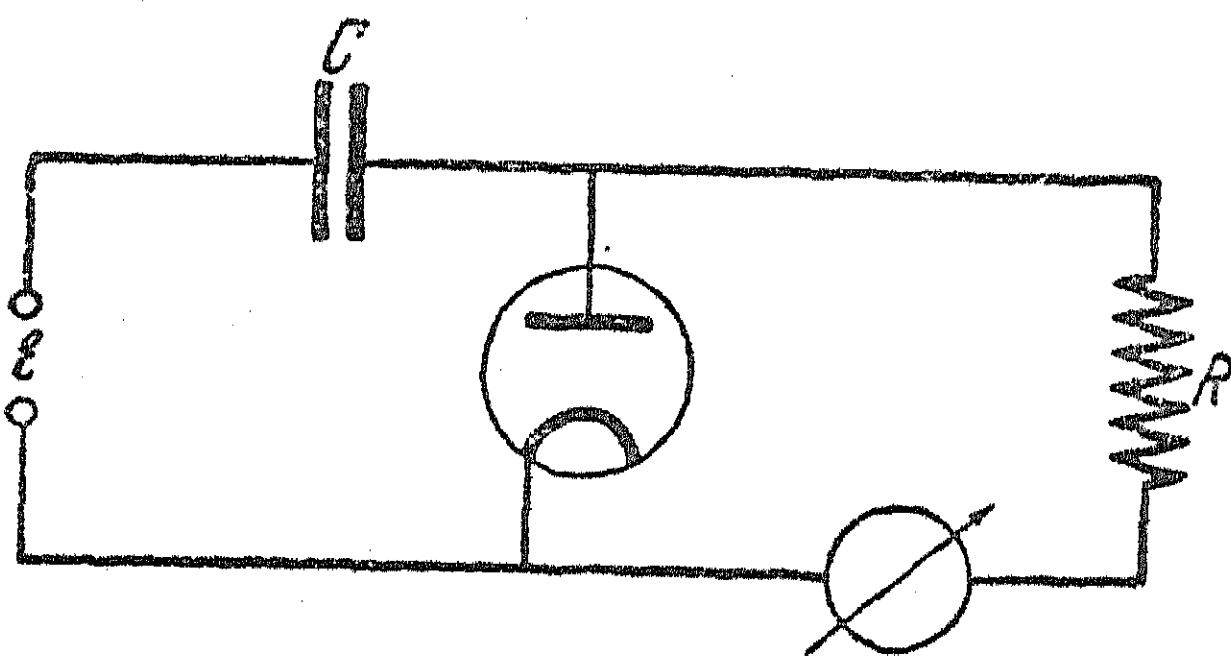


圖 104.

当 $R_0 \ll R$ 时，例如，当 $RCp = 100$ 时，这种伏特表与上面的那一种差不多沒有什么区别。(当 R 和 R_0 相等时)这个綫路的輸入电阻比上面那个綫路的輸入电阻要小一半。

§ 34. 檢波

由高頻調制訊号中得到低(音)頻振动的过程，在無綫电技术中称为檢波。

如我們在前面(§ 26)見过的，高頻調幅訊号代表着三个高頻：p，$p+\Omega$，$p-\Omega$ 的总和，其中 p 是“載波”高頻率，Ω 是音頻。在訊号中，沒有音頻 Ω 的振动，要收到它，必須檢波，檢波乃是一种訊号頻率的变換。这种变換只有借助于非綫性的导体才能实現。

首先看看，如果讓訊号通过二極管，那么，訊号中將产生些什么？为了分析的簡單起見，我們認为二極管的特性曲綫是"成段直綫"(圖 105)。

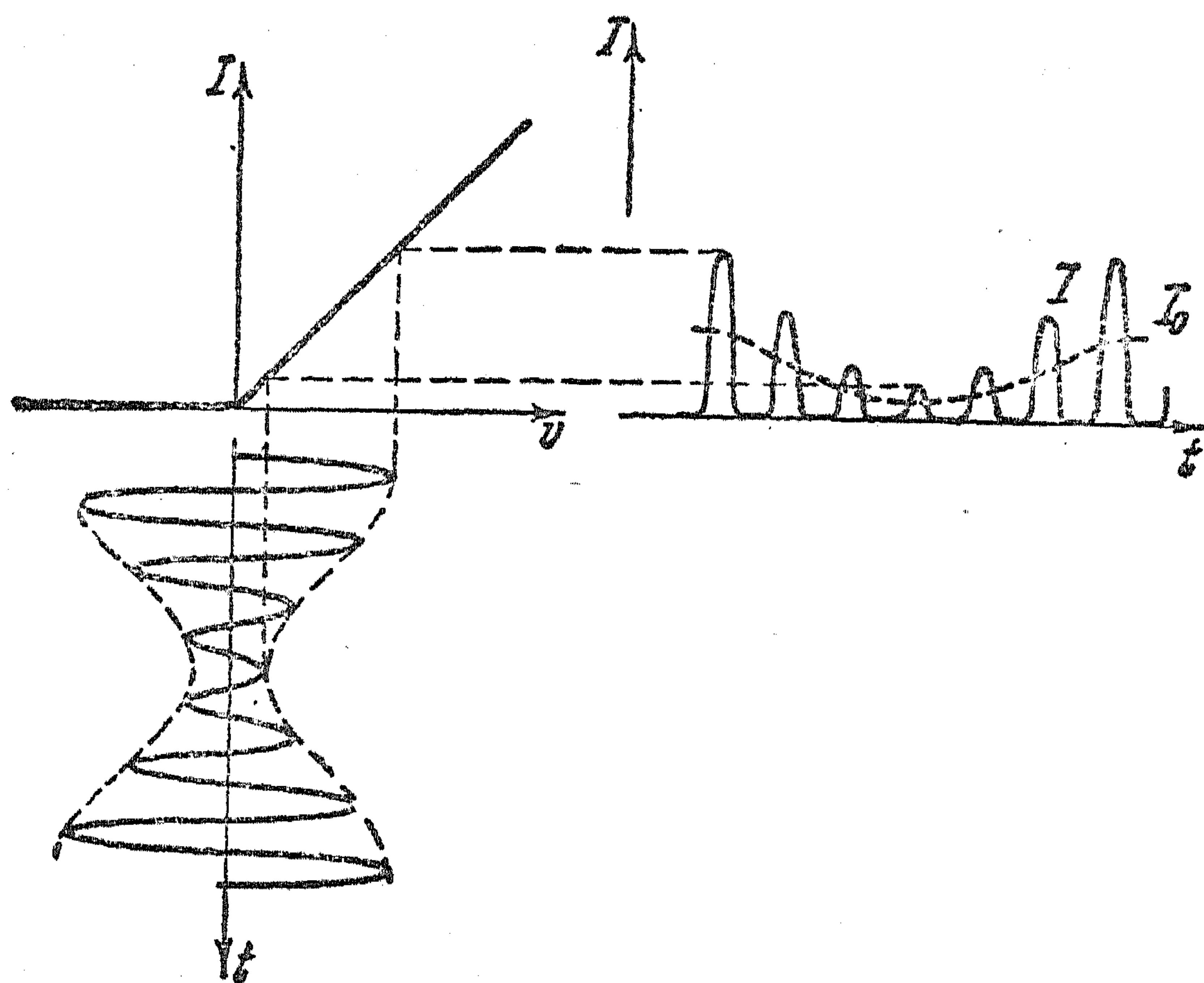


圖 105.

脉冲电流在二極管中流过。如果同时还有 RC 濾波器与二極管相連，那末在 $RCp\gg1$ 以及 $RC\Omega<1$ 的条件下，流过电阻 R 的电流 I_0 將作頻率为 Ω 的振动。其实，在 $RC\Omega<1$ 的条件下，因为对頻率为 Ω 的振动而言，电容器的电抗 $\frac{1}{C\Omega}$ 大于电阻 R，故脉冲的"平均"分量便和整流器情况下的"直流"分量相像。在二極管电路中的电流，簡要的表示在圖 106 上。电流中除了音頻振动与"載波"高頻 p 的振动以外，还会有頻率为 $2p$，$3p$ 等等的諧波存在。

高頻率在电容器上不产生显著的电压，因而在 R 上也不产生显著的电压。R 上的"平均"电压的振动，会引起截止角的变化从而減小音頻电流的振幅。但是，假如 $R<R_0$，那末这种变化便可以忽略，并可認为电流的振幅与調制度成正比。在这种近似下，可以認为："成段直綫"檢波器將無畸变地重現調制在無綫电發射台訊

号上的音頻振动。

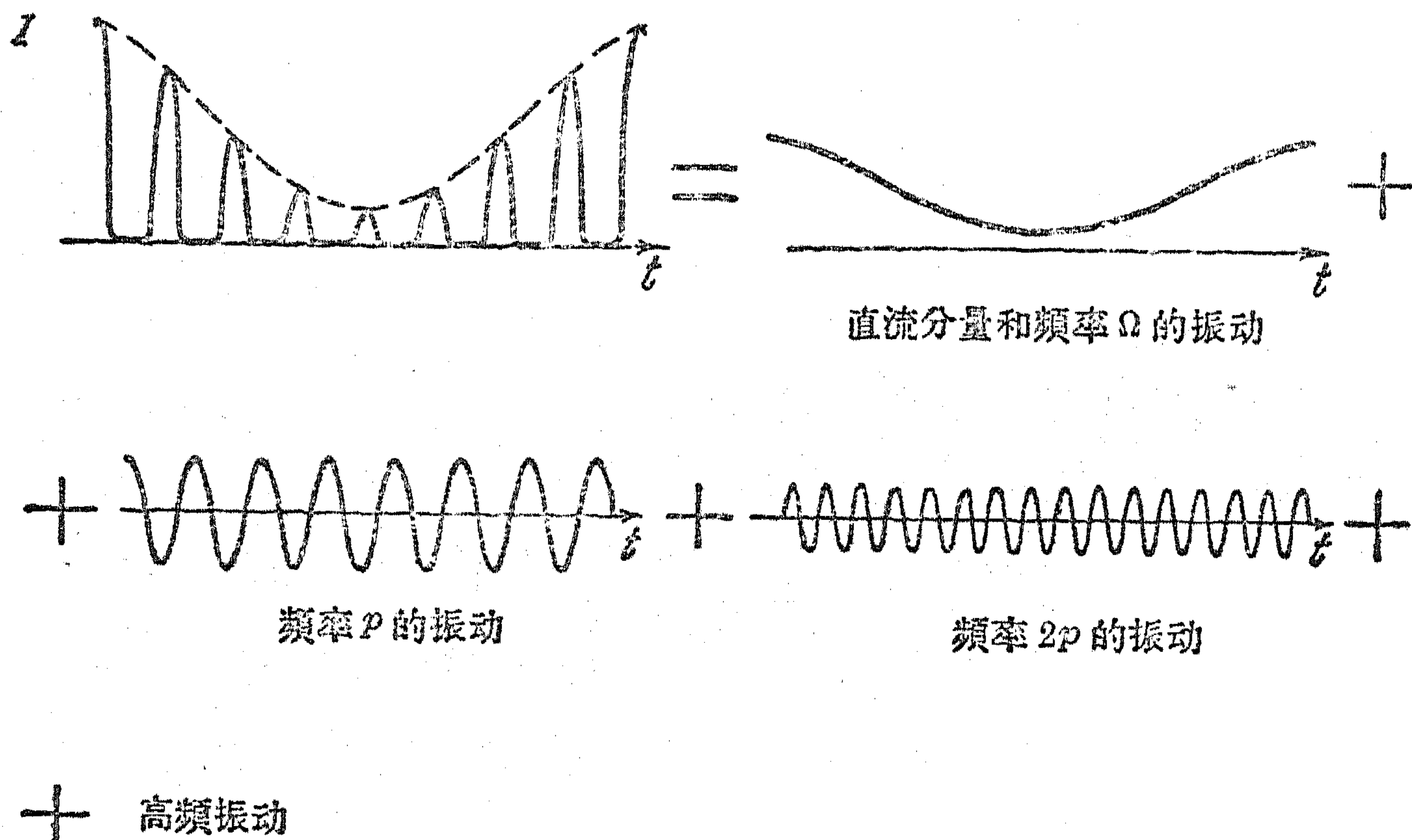


圖 106.

假如必須用"平方律"檢波器或者非綫性导体檢波器，則所得到的畸变將要大得多。这种檢波器其工作段上电压和电流之間的依存关系，系由平方律来表示的。要注意的是，同一个二極管，随着其工作段的大小和地区的不同，或者所通过的訊号的大小的不同（圖107），旣可以作为"平方律"檢波器，也可以作为"成段直綫"檢波器。

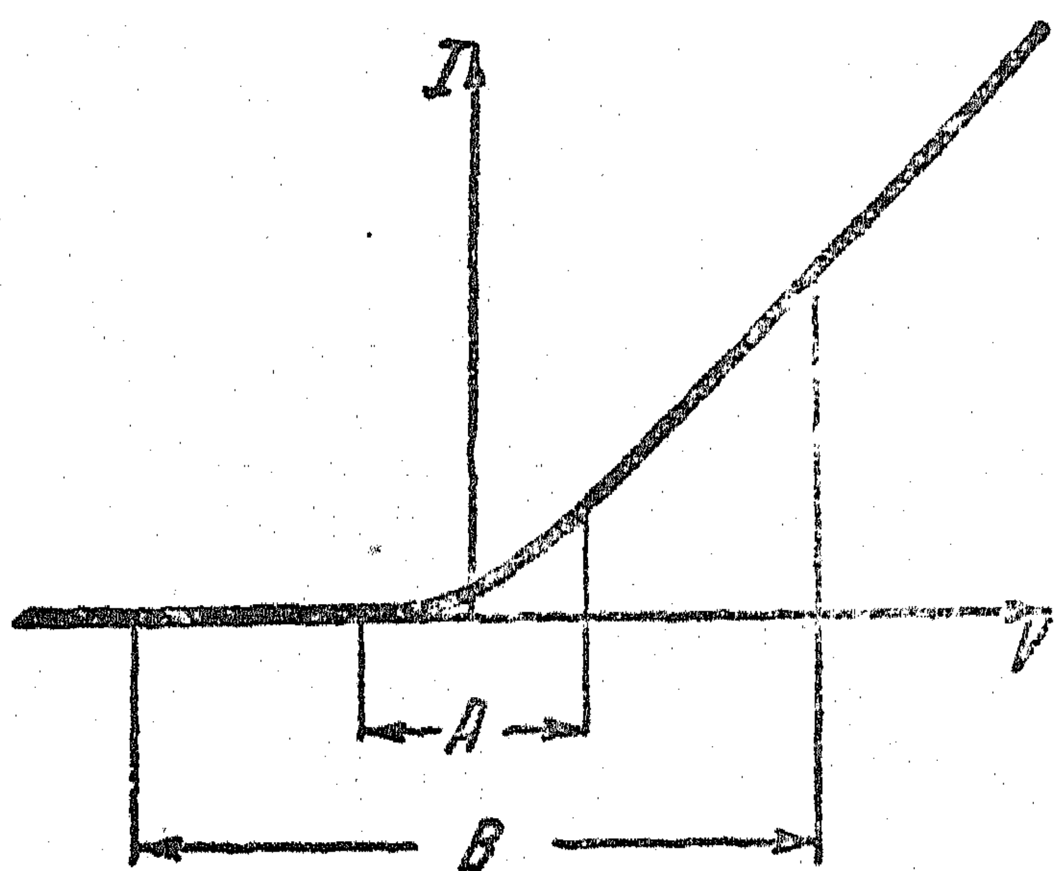


圖 107.

例如，一个二極管在A段上（圖 107）具有大概为下列形式的特性曲綫：

$$I=I_0+\alpha V=\beta V^2,\quad (34.1)$$

这时可以把它当作一个"平方律"檢波器；而当工作在B段时，則可以把它認为是"成段直綫"檢波器。

假如加于平方律檢波器（34.1）上的电压，具有如公式（26.2）所

代表的以及圖85所示的調幅訊号的形式，那末，电流振动將十分复杂。將(26.2)代換(34.1)中的V后，我們就得到电流I的振动。特性曲綫的綫性項$\alpha\Delta$，除了一个系数以外，准确地重現电压V。平方項βV^2將給出具有下列頻率的振动：

$$2p, 2(p+\Omega), 2(p-\Omega), 2p+\Omega, 2p-\Omega, 2\Omega, \Omega \text{ 及 } 0. \quad (34.2)$$

这些頻率是由V中所包含的各項的平方，以及各項兩兩的乘积而得出的，后者給出頻率的和与頻率的差。

不大复杂的計算指出：比較簡單的訊号頻譜(圖108，a)会提供复杂的电流振动頻譜(圖108，$б$)。

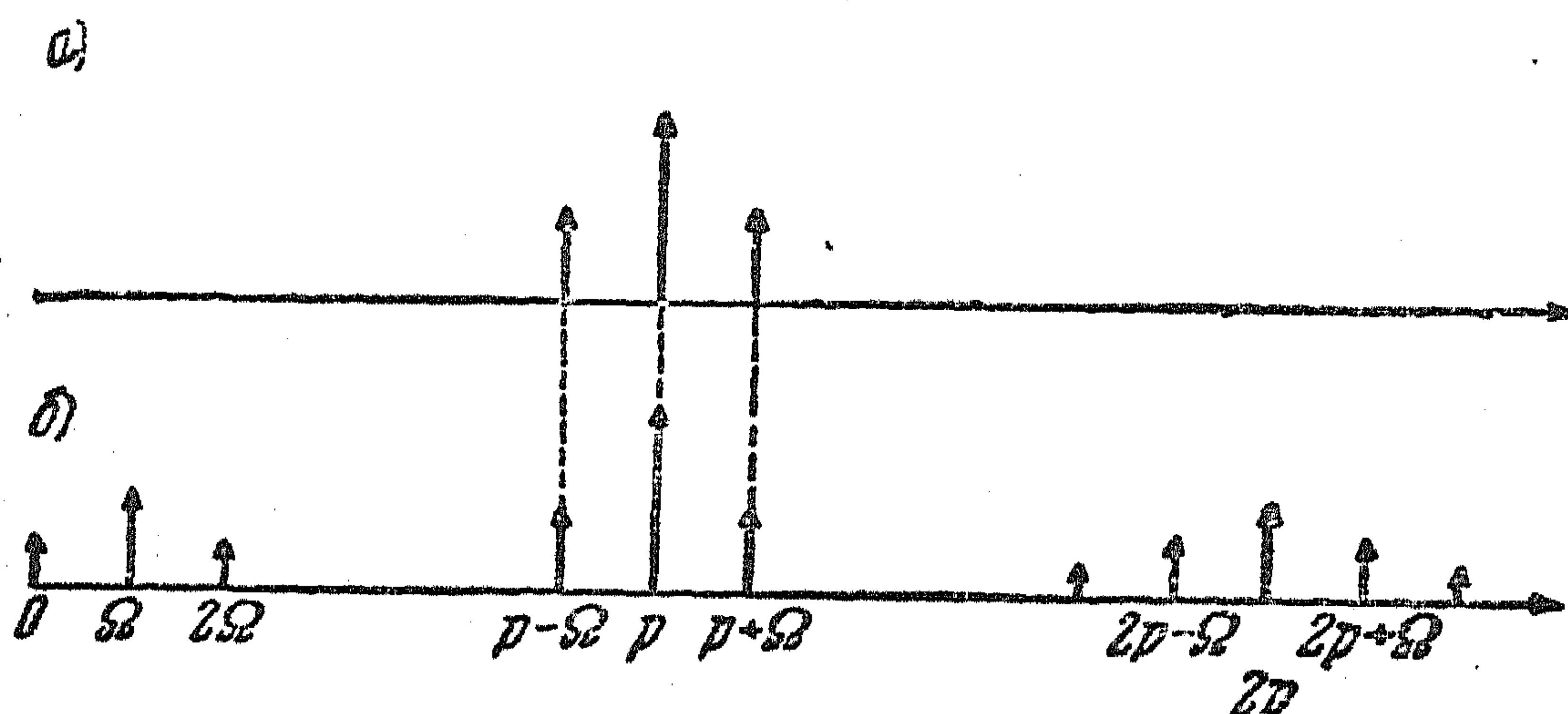


圖 108.

"濾波器"从复杂的頻譜中截去除了低頻Ω以外的一切頻率，經过濾波以后，应該留下頻率为Ω并具有下列振幅的振动，

$$\beta \mathscr{E}_0^2 \alpha.$$

很难由濾波器消除的"干扰"是頻率为2Ω的振动，它的振幅是：

$$\frac{1}{4}\beta \mathscr{E}_0^2 \alpha^2.$$

但当調制度系数α的値微小时，"干扰"的振幅將不大，因而可以忽略它。

因此，当訊号通过非綫性的导体进行檢波时，我們这样变換("畸变")着所收来的訊号，使得振动的分量中有音頻振动，即曾經調制在訊号上的音頻振动出現。

我們指出：綫性导体(或者包含电容量，电感量，和电阻的綫性

导体系統）能够改变各种頻率的振动的振幅和相位，而不能改变其頻率。

非綫性导体可以用来获得二倍、三倍等等的頻率。例如，为了得到頻率比較稳定的振动，在高頻振蕩器中，常常利用頻率倍加器，这是因为在低頻时比較容易保証頻率的恒定。

这种振蕩器的方框圖如圖 109 所示。也可以想出产生三倍頻

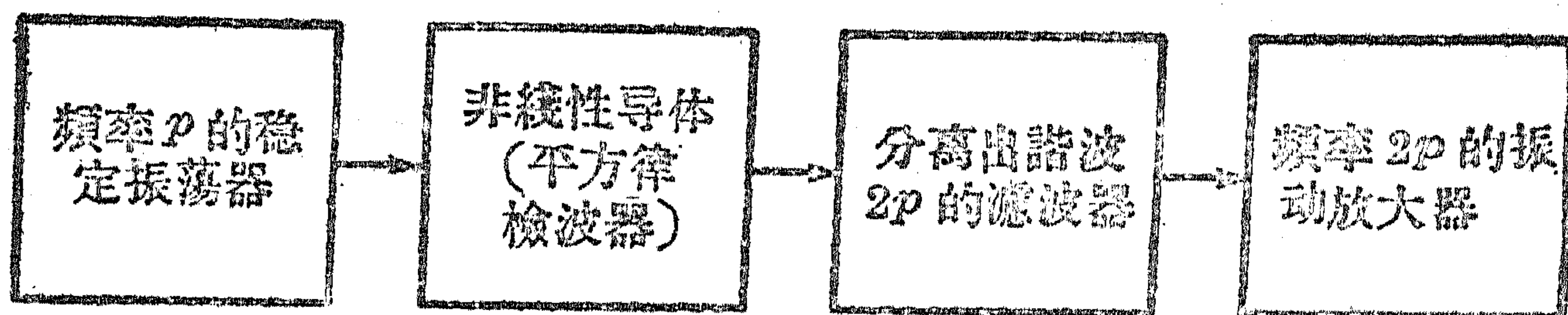


圖 109.

率的方框圖。为了这，导体必須具有"立方律"的特性曲綫，例如，这种形式的特性曲綫：

$$I=I_0+\alpha V+\gamma V^3.$$

这种导体中的电流，在正弦电压 $V=V_0\cos pt$ 的情况下，將含有頻率为 $3p$ 的三次諧波，这一振动也是將其余的頻率濾掉后得到的。

§35. 实际的檢波綫路

关于二極管檢波的計算曾在 §34 中講过。二極管檢波一般应用于强訊号的場合，这时可以把二極管的特性曲綫認为是"成段直綫"。对弱訊号說，二極管并不适宜，而宁願用有柵極的电子管，这种电子管在它特性曲綫的弯曲部分檢波弱訊号，同时还执行着放大器的作用。

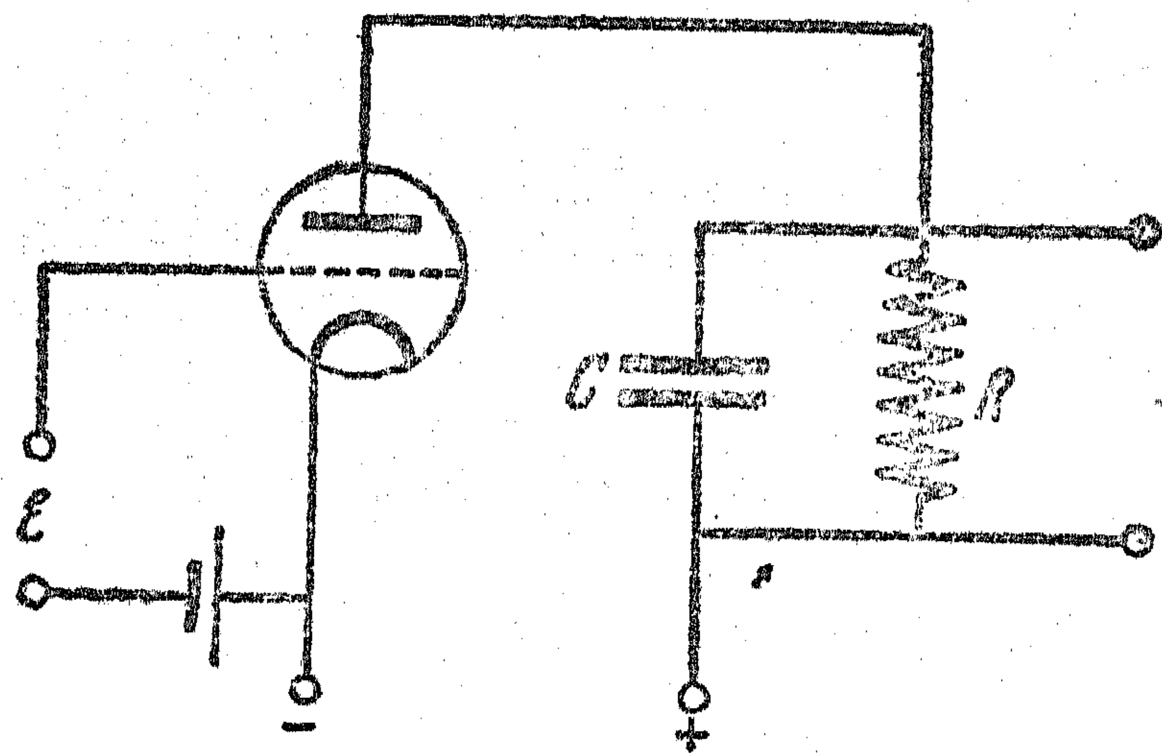


圖 110.

板極檢波的綫路如圖 110 所示。訊号 $\mathscr{E}$ 加在电子管的柵極上，而 RC 濾波器則接在板極电路內。工作点可以选在板極特性曲綫下面的弯曲部分或者上面的弯曲部分(圖111)。当然，与檢波

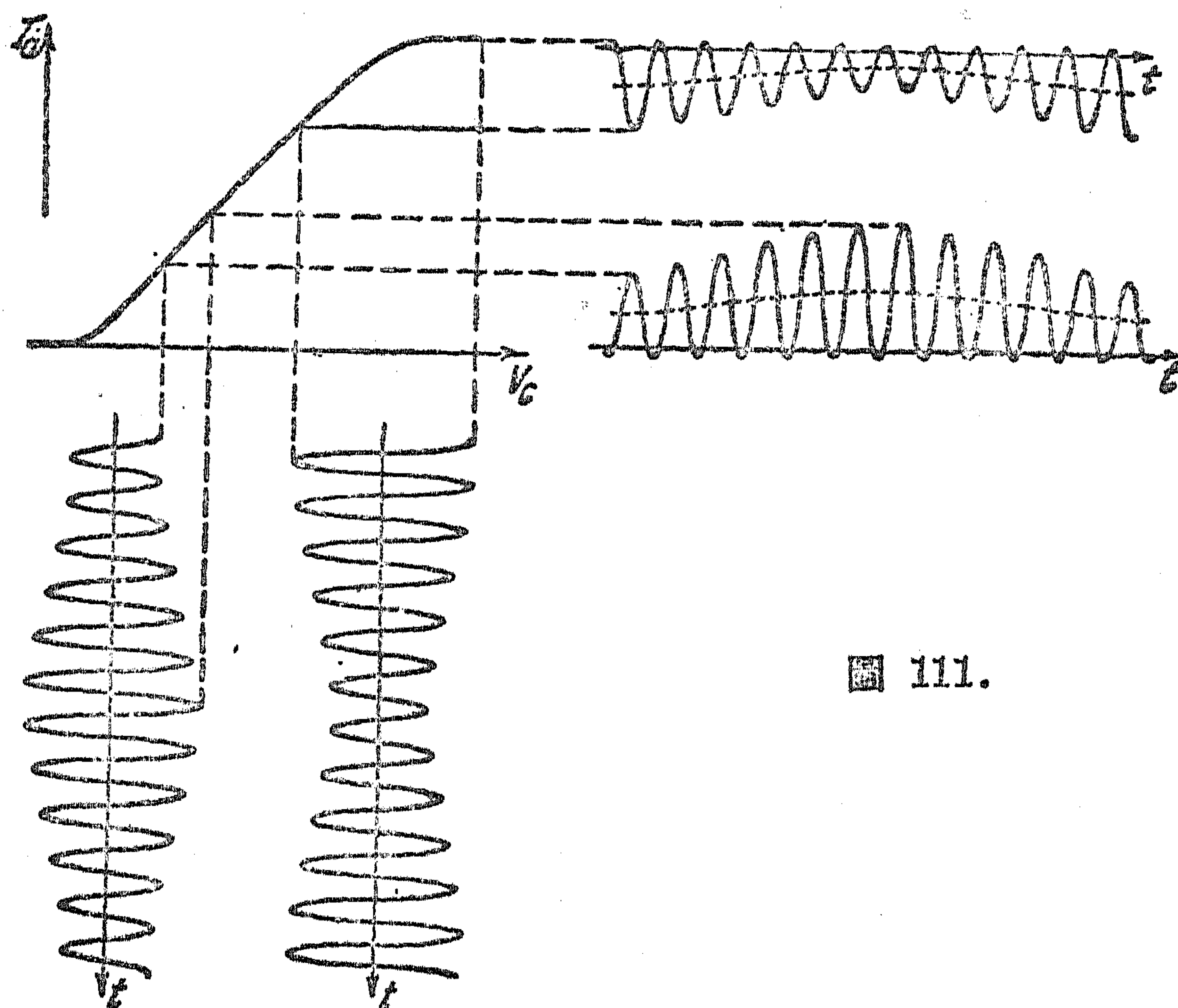


圖 111.

同时，这里还进行訊号的放大。就这一方面說，柵極檢波綫路特別适宜。

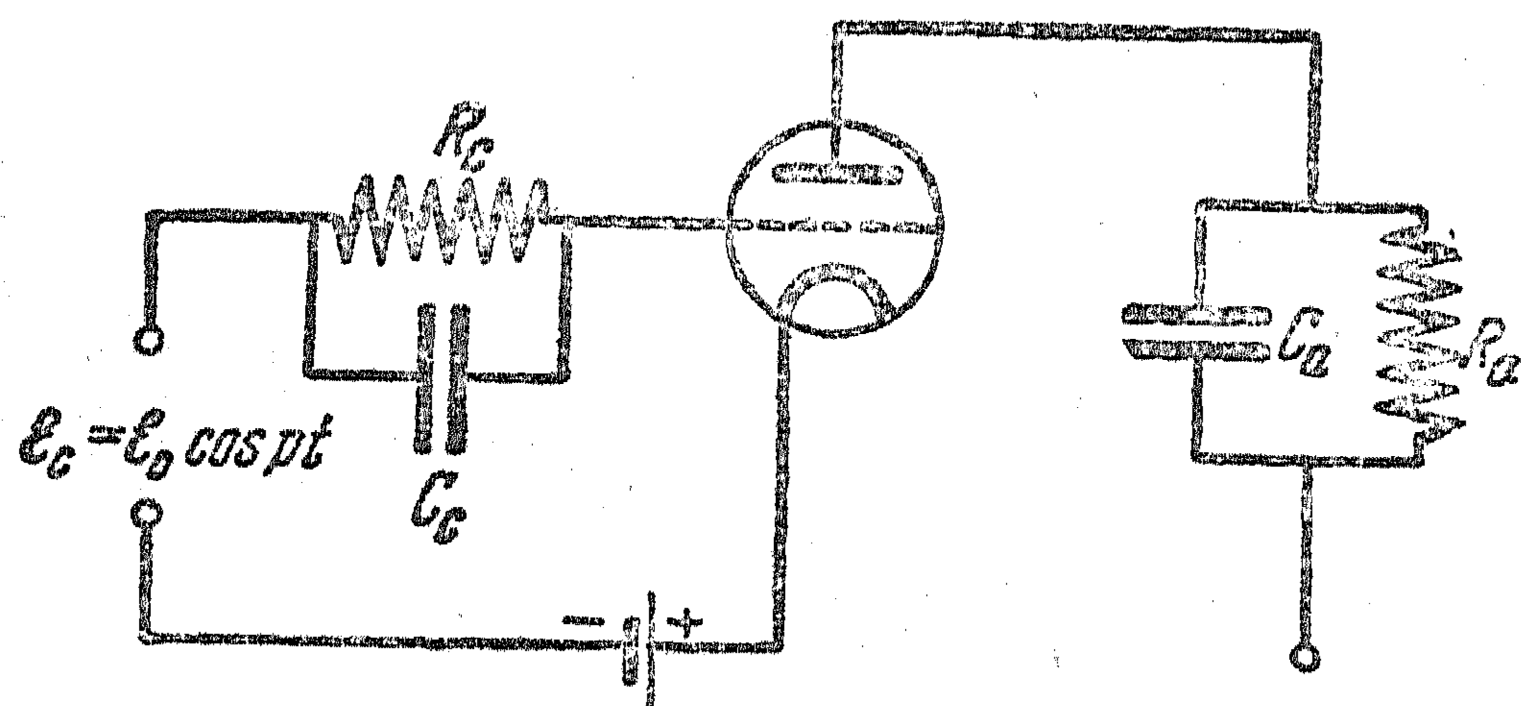


圖 112.

柵極檢波的綫路如圖 112 所示。

在这种情形下，工作点选擇在板極特性曲綫（板流——作为柵压的函数）的中間部分和在柵流特性曲綫（柵流——作为柵压的函数）的下面弯曲部分。这时柵極电路的作用和二極管檢波一样，在电阻 R_c 上产生頻率 Ω 的电压，这一电压以同样的頻率改变着板流。

必須这样选擇电阻和电容量，使得它們能滿足下列各条件：

$$R_cC_c\Omega\leqslant 1;\qquad R_cC_c\,p\geqslant 1,$$
$$R_aC_a\,p\geqslant 1,\qquad R_aC_a\Omega\leqslant 1.\tag{35.1}$$

电流与电压的变化圖形可以在圖 113 上看出。

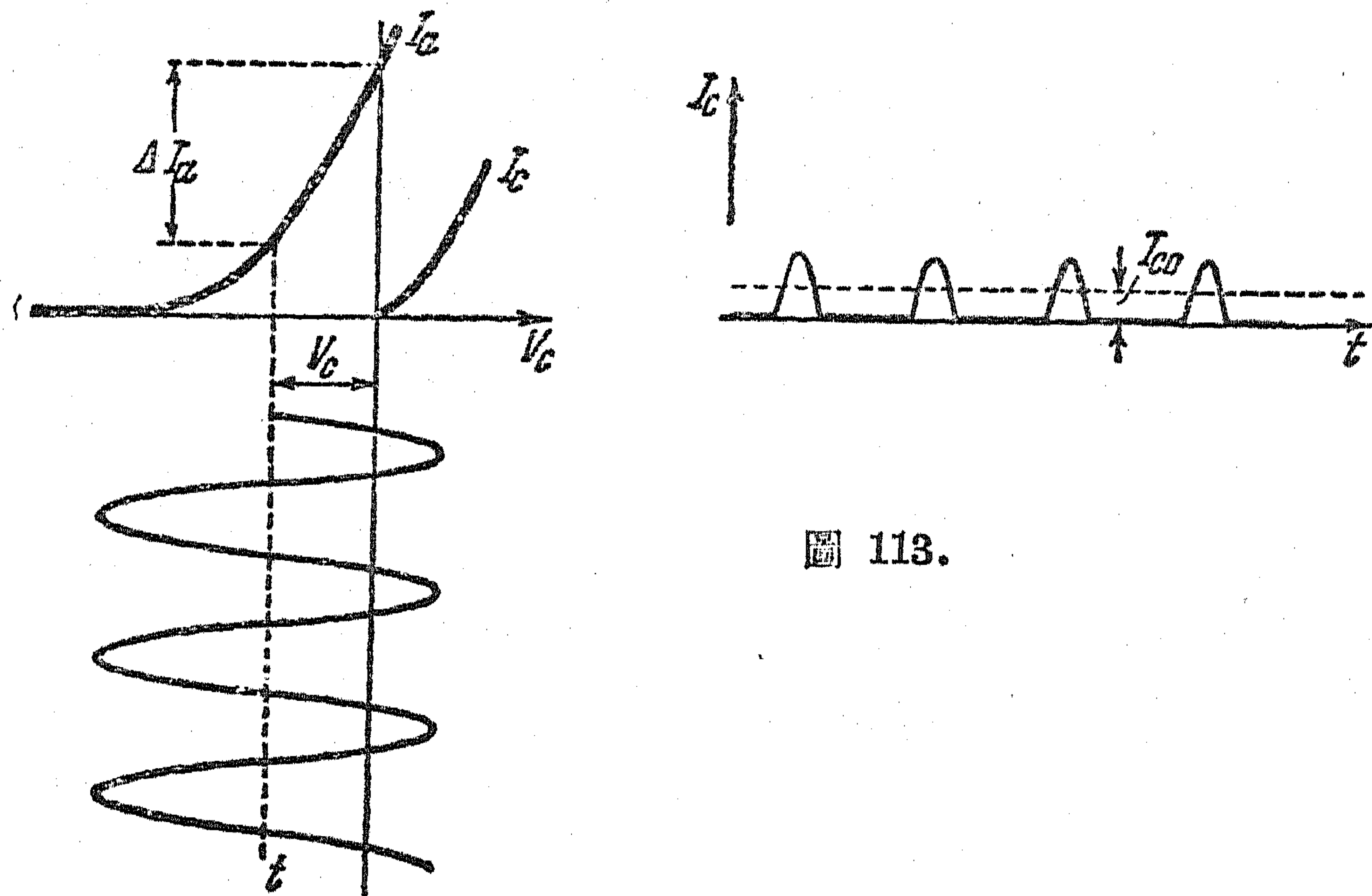


圖 113.

由于 $\mathscr{E}_c=\mathscr{E}_0\cos pt$ 的作用，在 R_c 上引起直流电压降 $\Delta V_c=$ $=\Delta I_{c0}R_c$，这一电压降又引起 $\Delta I_a=S\Delta V_c$ 的板流变化，以及最后引起在板極电压上的变化 $\Delta V_a=\Delta I_aR_a$。

檢波器与放大器的有效作用可以用下列比值来估計，

$$\frac{\Delta V_a}{\mathscr{E}_0}.$$

設电子管的柵極特性曲綫在一般形式下为：

$$I_c=f(U_c),\tag{35.2}$$

其中 U_c 为柵極—陰極电压，讓我們来进行柵極檢波器的計算。

当有訊号 $\mathscr{E}_c=\mathscr{E}_0\cos pt$ 时，柵極电压的振动將大致等于：

$$\Delta U_c=\mathscr{E}_c-\Delta V_c=\mathscr{E}_c-R_c\Delta I_{c0}.\tag{35.3}$$

我們用二次多項式来近似代表在 $U_c=0$ 附近的柵極特性曲綫

(35. 2)：

$$\Delta I_c = f'(0)\Delta U_c + \frac{1}{2} f''(0)(\Delta U_c)^2. \qquad (35.4)$$

將(35.3)的值代入上式，

$$\Delta I_c = f'(0)(\mathscr{E}_c - R_c\Delta I_{c0}) + \frac{1}{2} f''(0)(\mathscr{E}_c - R_c\Delta I_{c0})^2 =$$

$$= f'(0)(\mathscr{E}_c - R_c\Delta I_{c0}) + \frac{1}{2} f''(0)[\mathscr{E}_c^2 - 2\mathscr{E}_c R_c \Delta I_{c0} +$$

$$+ R_c^2(\Delta I_{c0})^2], \qquad (35.5)$$

然后取这一表达式对时間的平均值，并注意到下列对时間的各平均值：

$$Cp①(\mathscr{E}_c) = 0, \qquad Cp(\mathscr{E}_c^2) = \frac{\mathscr{E}_0^2}{2}, \qquad Cp(\Delta I_c) = \Delta I_{c0},$$

因此如果不計 ΔI_{c0} 的平方項，对于平均值而言，由公式(35.5)我們得到：

$$\Delta I_{c0} = f'(0)(-R_c\Delta I_{c0}) + \frac{1}{2} f''(0)\frac{\mathscr{E}_0^2}{2}, \qquad (35.6)$$

由(35.6)，我們最后得到柵流的平均值为：

$$\Delta I_{c0} = \frac{f''(0)}{4[1 + f'(0)R_c]}\mathscr{E}_0^2. \qquad (35.7)$$

表达式(35.7)給出了柵流平均值的变化量和加于陰極—柵極輸入端的电压振幅之間的依存关系。假如在工作段上的柵流特性曲綫可以用下列二次曲綫来代表：

$$I_c = I_0 + \alpha U_c + \beta U_c^2,$$

那末，

$$\Delta I_{c0} = \frac{\beta}{2[1 + \alpha R_c]}\mathscr{E}_0^2,$$

$$\Delta V_c = R_c \Delta I_{c0} \frac{\beta R_c}{2[1 + \alpha R_c]}\mathscr{E}_0^2.$$

---

① Cp 代表平均值 —— 譯注。

因此，在板極电路中音頻电压的振幅將与下式

$$\Delta V_a = SR_a\Delta V_c = \frac{\beta R_c R_a S}{2[1+\alpha R_c]}\mathscr{E}_0^2 \qquad (35.8)$$

成正比。經过檢波后的訊号的振幅，与柵流特性曲綫的曲率 β 以及板流特性曲綫在工作点的互导 S 成正比。

§36. 外差法

为了接收电报訊号（圖 114），常常用外差法。当粗略的近似

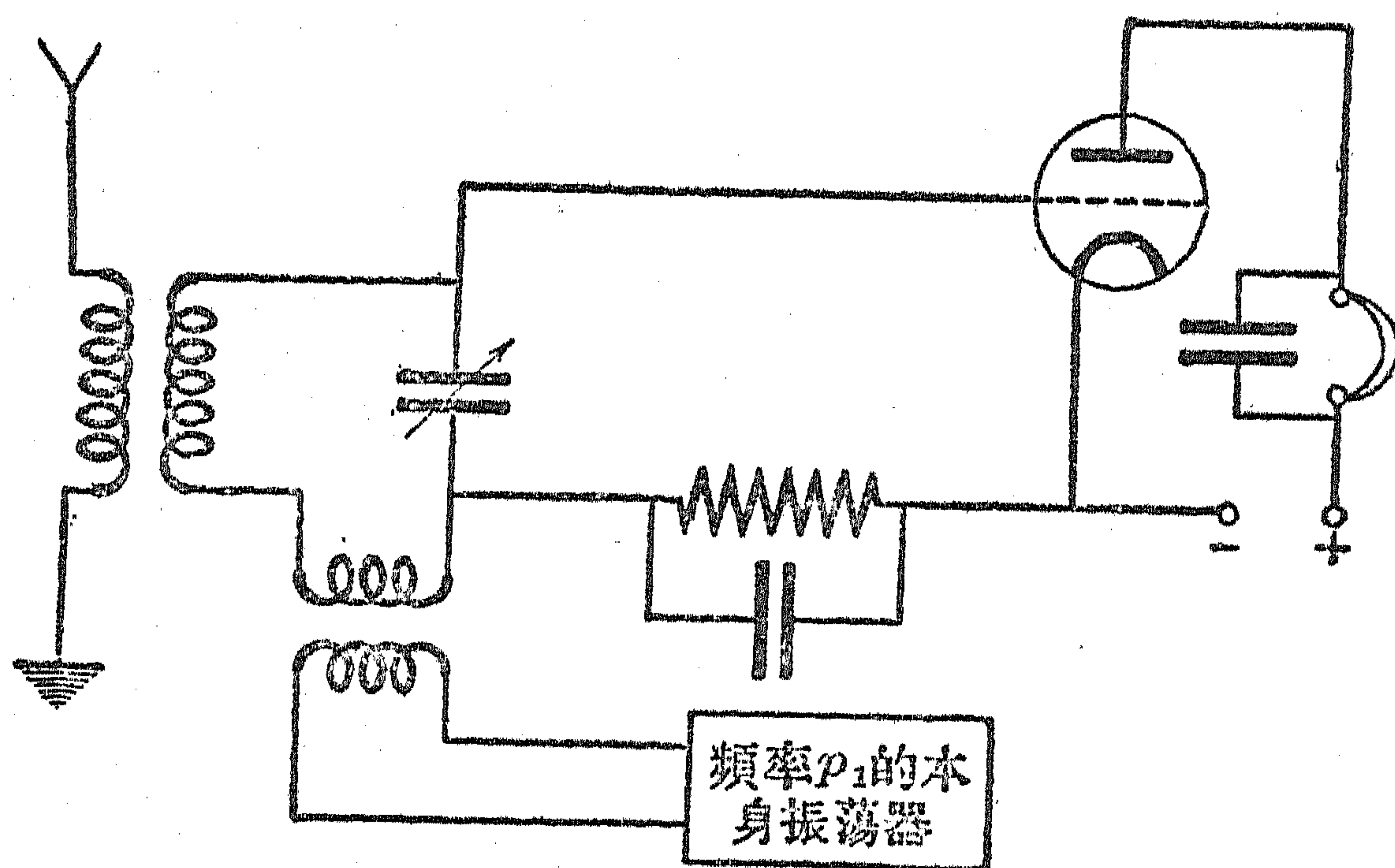


圖 114.

时，电报訊号可以用一个“正弦脉冲”，卽一段具有頻率 p 的正弦波（参看圖 87）来代表。在收报机中，在这一具頻率 p 的振动上加上一由本身振蕩器發出的具頻率 $p_1$① 的振动，然后將所得到的拍加于檢波器上，这檢波器分离出音頻 p_1-p。于是，在电子管板極电路中的听筒便会感受到音頻振动。在收报机的輸入迴路中的振动頻譜如圖 115, a 所示，而經过平方律檢波器后的頻譜則如圖 115, $б$ 所示。因此，本身振蕩器和檢波器一同將射頻变換为音頻。显然，一般为了变換振动的頻率，例如在超外差中，总可以用这样的本身振蕩器。

① 本身振蕩器的頻率 p_1 与 p 之間相差一个音頻。

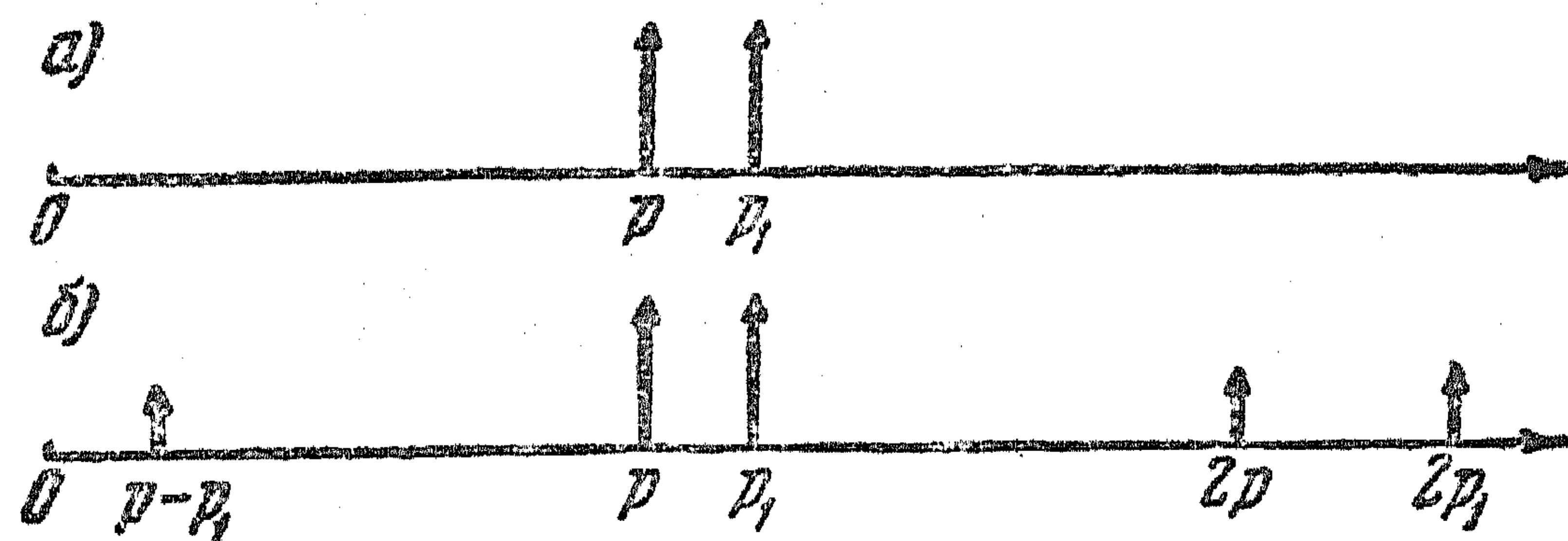


圖 115.

§37. 超外差

超外差是現代無綫电接收机中一种很流行的綫路，这种接收机能保証收听弱無綫电訊号。

超外差与直接放大接收机的差别是：在直接放大接收机中，在檢波以前一直进行高頻訊号的放大；在超外差中，主要的放大是在与所收电台頻率無关的恒定頻率下，即所謂"中頻"下进行的。放大十分高的頻率有很大的困难，这是因为寄生电容的存在或者引起放大系数的降低，或者引起振动。因此，在超外差中，对与 p 接近的所收訊号的頻率，或許作少許的放大，然后把由本身振蕩器發出的頻率为 p_1 的振动加上去。

載波頻率 p 与本身振蕩器的頻率 p_1 的差总保持一定的(也是高的)頻率。兩个訊号通过檢波器，然后进入濾波器，这濾波器把接近于差(p_1-p)，接近于"中頻"的振动分离出来。

往后便是共振放大器——調諧在頻率 p_1-p 的"中頻"放大器。因为加于檢波器的兩个訊号中的一个，是被音頻所調制的，那末，不难理解，頻率为 p_1-p 的中頻振动也將为同样的音頻所調制，經过中頻放大器之后，振动进入第二檢波器，这檢波器就將音頻振动分离出来。假如这时有需要的話，則再將音頻振动接入低頻放大器上。因为兩个迴路(接收迴路与本身振蕩器的迴路)的电容器的可动片裝在同一个軸上("电容器組")，所以接收迴路对所

收电台頻率調諧时，本身振蕩器的頻率也同时發生变化。

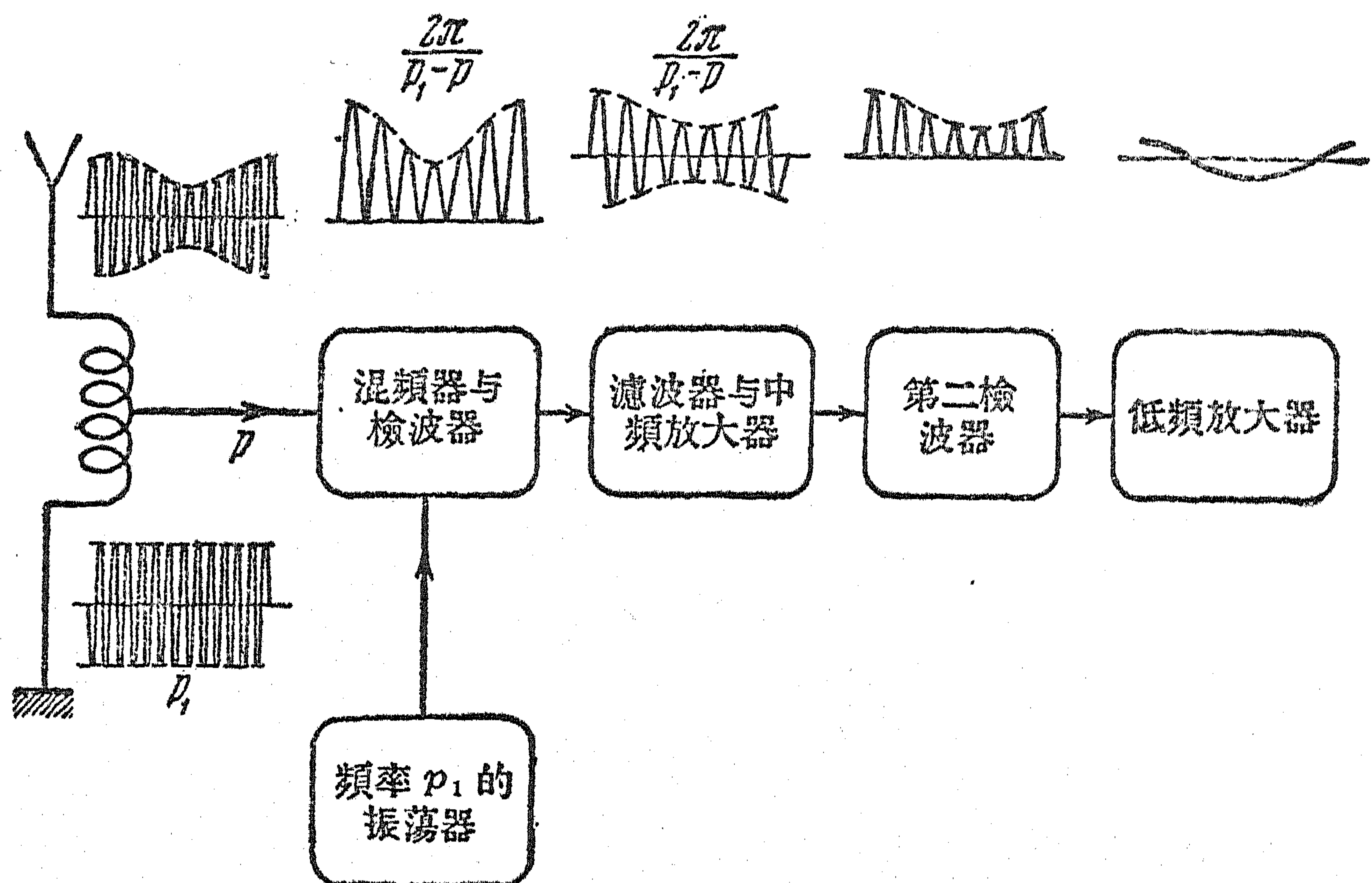


圖 116.

超外差的主要單元圖，表明在圖 116 上。在每一个單元的上

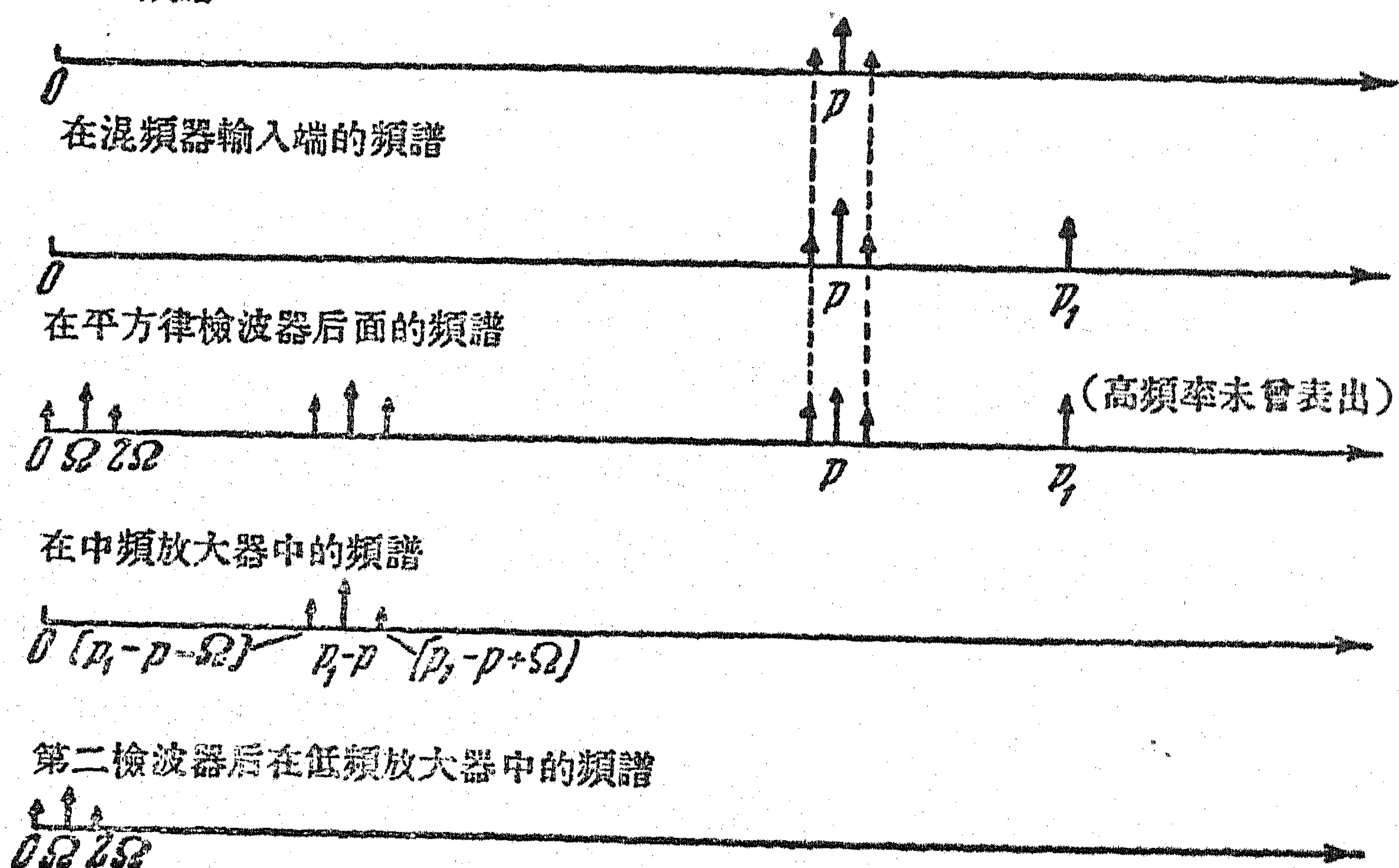


圖 117.

面繪着説明每一級振动特性的圖形。振动頻譜接連变換的情况則如圖 117 所示。

主要的放大是在中頻进行的(在一般無綫电接收机中,中頻等于 460—480 千赫)。加于第二檢波器上的訊号，具有几伏左右的振幅，因而这里通常用二極管作檢波器。在特殊的超高頻接收机中,例如电視所用的接收机中,有时要接連进行几次頻率变換。

第七章　参数振动

在前面几章里，仅仅研究过固有振动和受迫振动。在固有振动时，正在振动的系統，是与任何外来的作用隔离的。在受迫振动中，除了固有振动以外，还有一变变的外力作用于系統上；这一外力在数学上的表示法，是在方程式中引入一个明显地依存于时間的項。

但在振动系統上，也可能有完全另外一种形式的外来作用：外力并不直接作用于系統上，但系統的参数（包含在方程式的系数中）依存于时間，外来的作用按一定的規律来变化系統的参数。由于参数变化的結果而产生的振动过程称为振动的参数激励；而这种振动称为参数振动。

§38. 秋千的摆动

秋千的摆动是振动的参数激励的一个最簡單的例子。在这种情形下，秋千可以代表一个具有变变長度的（数学）摆。

令摆的長度 l 按諧規律变化（圖 118），点 A 以頻率 p 和振幅 a 进行振动。

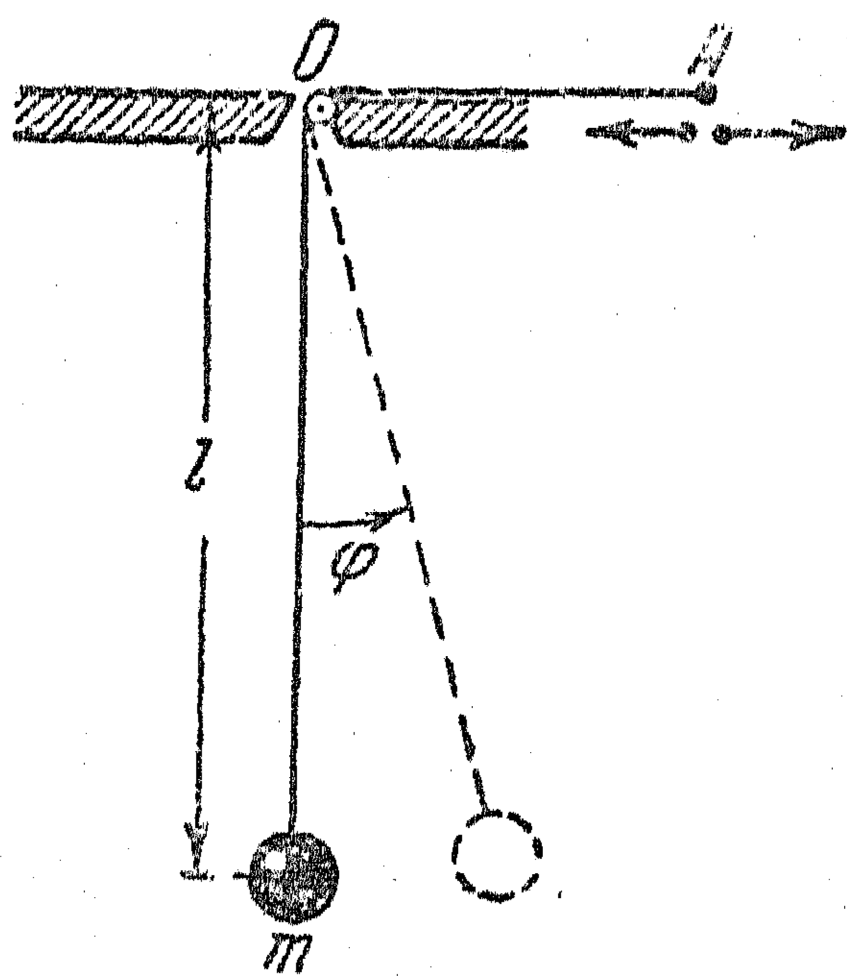


圖 118.

那末，圍繞通过 O 点的軸綫的轉动，其方程式可以写为：

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl\sin\varphi,$$

或者

$$ml^2\ddot{\varphi} + 2ml\dot{\varphi}\frac{dl}{dt} + mgl\sin\varphi = 0. \tag{38.1}$$

假設
$$l=l_0\left(1+\frac{a}{l_0}\cos\ pt\right).\tag{38.2}$$
我們將在这样的假定下来研究关于摆的振动問題：設 $\frac{a}{l_0}\ll 1$，即摆的長度变化与摆的平均長度 l_0 比起来，显得很小，并設摆的振动振幅微小，$\sin\varphi\approx\varphi$。那末，运动方程式(38.1)可以写为这样的形式：
$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l_0+a\cos\ pt}\varphi=0,\tag{38.3}$$
或者写为一般的形式
$$\ddot{\varphi}+\psi(t)\varphi=0.\tag{38.4}$$

方程式(38.4)是"諧"系統的"固有"振动的方程式，振动的"頻率"明显地依存于时間——这方程式就是能作参数振动的系統方程式的最簡單的形式。关于方程式(38.3)的解將在以后講，而現在讓我們用簡單的方法来分析一下，当摆的長度作周期变化时所發生的現象。

假定由于某种外来的原因(由于偶然的冲击)，摆作大概对应于下列頻率的固有振动，
$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l_0}},$$
其中 g 为重力加速度；同时摆的長度也变化着，令摆長变化的頻率比固有振动的頻率大一倍；而相位則如圖 119 和 120 所示。

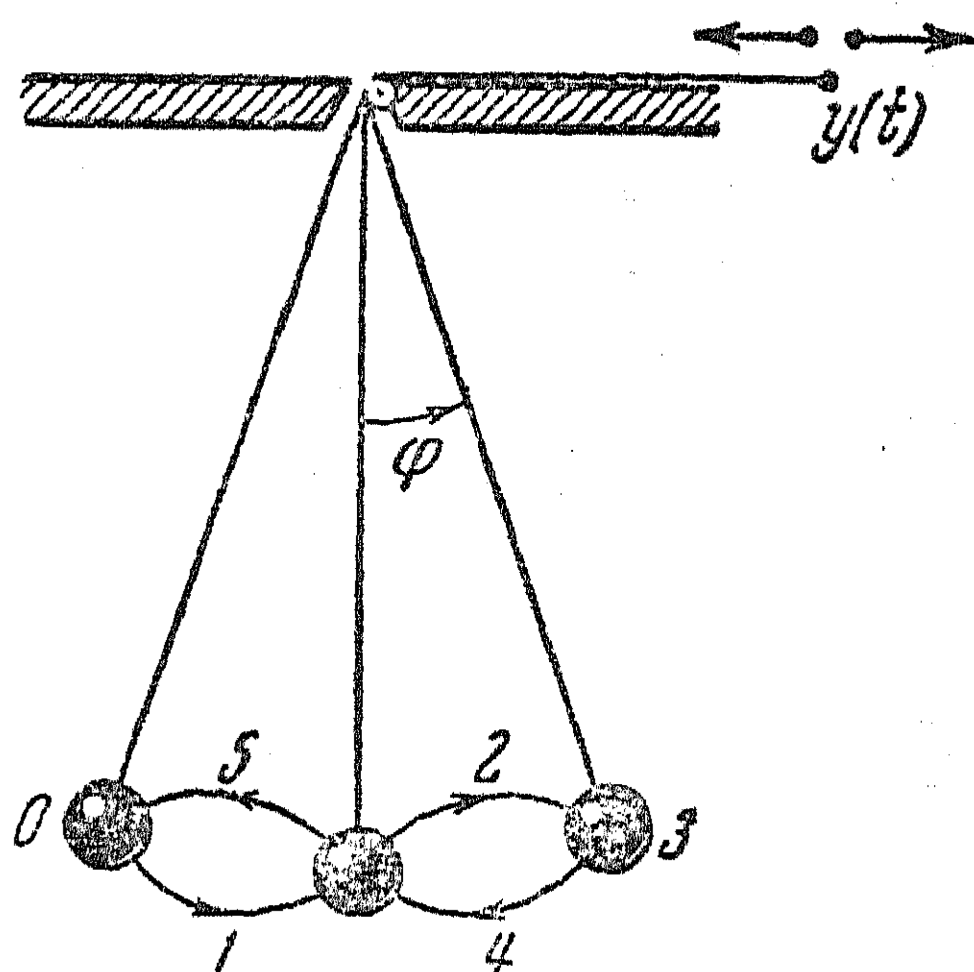


圖 119.

荷重 m 的运动正如圖 119 上矢所标明的：由点 1 到点 2 荷重上升，由点 2 到点 4 荷重下降等等。悬点的振动 $y(t)$ 以及摆的振动 $\varphi(t)$ 則繪在圖 120 上。

值得注意的是：当摆具有小速度(在靠近于極边位置)时，荷重

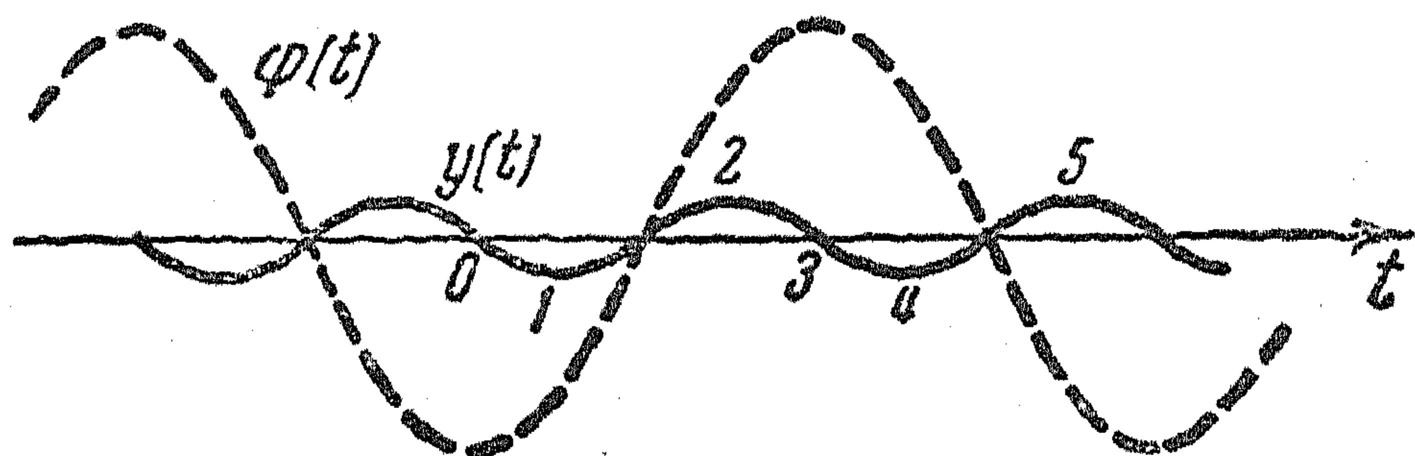


圖 120.

下降，而当摆具有最大的振动速度（發生在平衡位置附近）时，荷重上升。由此可以作出結論：当荷重上升时綫的張力要大于荷重下降时綫的張力。这就是說：变更綫的長度的外面系統作正功，把能量傳給摆。在这种情形下，假如当摆运动时沒有摩擦存在，摆的振动振幅就会增加；当有摩擦存在时，如果外系統的功大于振动时由于摩擦所損失的能量，那末，振动振幅仍旧会增加。这一現象称为参数共振。打秋千就是用这样的方式，和秋千的振动合拍地蹲下去和站起来。

§39. 参数振动的簡要計算

为了闡明現象的物理本質和計算的簡單起見，讓我們在作参数振动的系統中，先研究一个簡單的模型：在这一模型中，摆長的变化是突变的。和前面一样，假設長度 l 变化的周期为摆的固有振动周期的一半，并这样的变化相位：即当摆通过平衡位置的时

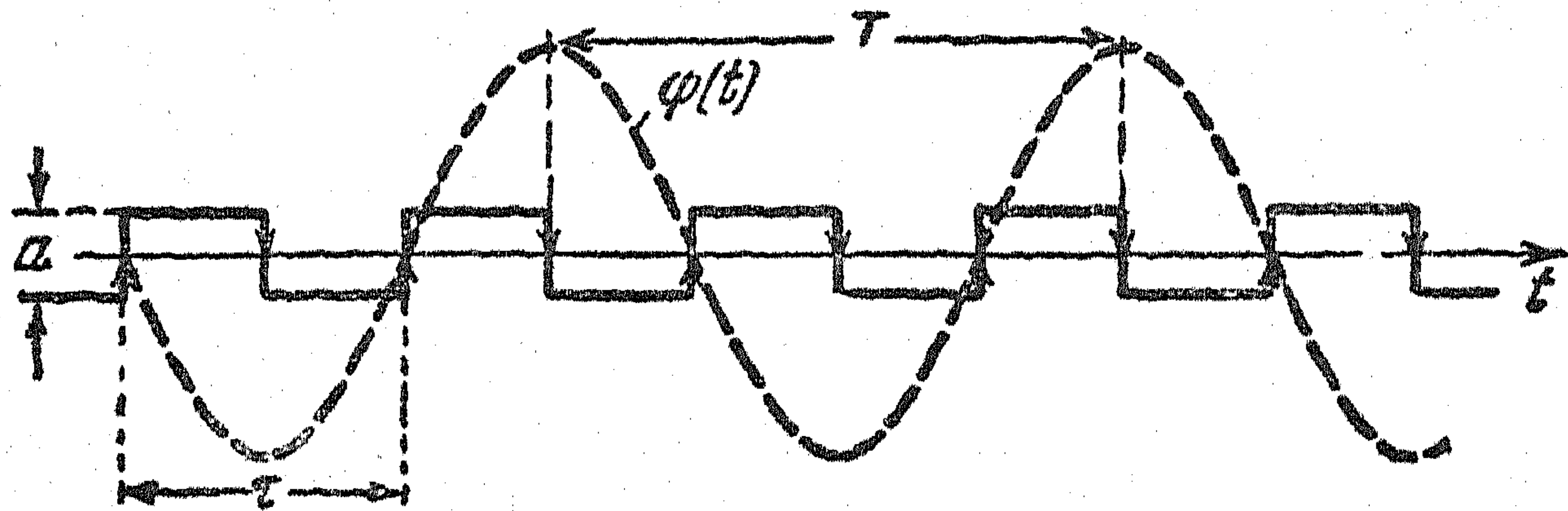


圖 121.

候，質量 m 升高。外力在升高質量 m 时所作的功为：

$$mga+\frac{mv^2}{l_0}a, \tag{39.1}$$

其中 $v=l_0\varphi_0\omega_0$ 是摆在中間位置的速度，a 是升高的値，φ_0 是振动

的振幅。除重力外还有一离心力$\frac{mv^2}{l_0}$。当荷重m上升时，(39.1)的功由外系統从外面傳給摆。

当摆在極边点下降时，这里速度等于零($v=0$)，由摆傳給外系統的功等于

$$mga\cos\varphi_0,$$

当φ_0小时，它等于

$$mga\left(1-\frac{1}{2}\varphi_0^2\right). \qquad (39.2)$$

上式是当荷重m下降时，由摆退还給外系統的能量。因此，在振动的一个周期T内，摆所得到的能量为：

$$\Delta E=2a\left(\frac{mv^2}{l_0}+\frac{mg}{2}\varphi_0^2\right).$$

假設$\frac{a}{l}\ll 1$，以及$\varphi_0\ll 1$时，根据能量守恒定律，可以大致認为：

$$\frac{mv^2}{2}\approx\frac{1}{2}mgl_0\varphi_0^2.$$

因此
$$\Delta E\approx 6\frac{a}{l_0}\frac{mv^2}{2}$$

或者用$E=\frac{mv^2}{2}$表示振动的总能量，我們便可以把上式写为：

$$\Delta E\approx 6\frac{a}{l_0}E. \qquad (39.3)$$

經过一周期后，振动能量所增加的値与振动的总能量成正比。在这种情形下，可以証明振动能量是按指数規律增加的，即假如在某一时刻振动能量为E_0，那末，經过n个周期以后，能量將为：

$$E_n=E_0e^{n\alpha T}, \qquad (39.4)$$

其中
$$\alpha=\frac{1}{T}\ln\left(1+\frac{6a}{l_0}\right).$$

重要的是，随着时間的增加，能量的增加越来越多，振动的振幅將

迅速地增長。

假如在系統中有摩擦，那末，仅仅在这种情形下，即在一周期內，外力所作的功大于由于摩擦所損失的能量时，才会有振动的增長。令摩擦系数等于 h，那末，在 $\varphi \approx \varphi_0 \sin \omega_0 t$ 的条件下，在一周期內摩擦力矩 $h\dot{\varphi}$ 所作的功將等于：

$$\Delta W = \int_0^T h\dot{\varphi}^2 dt = \omega_0^2 h \varphi_0^2 \int_0^T \cos^2 \omega_0 t \, dt = \frac{1}{2} h \omega_0^2 \varphi_0^2 T. \tag{39.5}$$

記得总能量 $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 \varphi_0^2 l_0^2}{2}$，以及阻尼的減縮(4.8)

$$\vartheta \approx \frac{hT}{2ml_0^2}，我們得到\ \Delta W \approx 2\vartheta E. \tag{39.6}$$

在近似正弦振动的情形下，由于摩擦，在一周期內能量的减少量与振动能量成正比。

因此，將(39.3)和(39.6)加以比較时，便得到下列形式的振动增長的条件，或者存在参数激励的条件：

$$\frac{3a}{l_0} > \vartheta. \tag{39.7}$$

注意到：当 $\frac{3a}{l_0} = \vartheta$ 时，在理論上应該存在具有任意振幅的無阻尼振动；当 $\frac{3a}{l_0} < \vartheta$ 时，振动將衰減下去；与点 $\frac{3a}{l_0} = \vartheta$ 相对应的振动狀态，在物理上是不存在的，因为当参数有任何的、即令是十分小的变化时，系統便或是轉入振动的增長区域，或是轉入振动的衰減区域。

增長振动的参数激励，或者有时称之为参数共振，和一般共振的重要区别在于：周期性的解仅仅代表增長振动的边界。当参数共振时，其与一般共振所不同的，是即令系統中有摩擦，振动在理

論上应該增長到無穷大的振幅。而实际上，当参数共振时，例如在秋千的摆动中，又看到周期振动，于是，上述的推理便不能解釋这种振动的存在。事实上仅仅当小振幅时，当系統是綫性的时候，才会有理論上所曾指出的那种能量的增長，随着振动振幅的增加，那些以前未考虑过的、方程式的非綫性項，將起着重要的作用。因而振动振幅会是有限的。这样一来，在具周期性系数的系統中，有关稳定周期性运动存在的問題便屬于非綫性的振动理論。

§40. 参数共振的区域

分析参数共振时，我們曾經認为，参数变化的周期恰好为固有振动周期的一半。假如参数变化的周期，按大小說接近于固有周期的一半时，可以預料將出現大致相同的情形。

同样簡單的探討，引出一种想法：即在固有振动周期和参数变化的周期为其他的关系时，也可能有参数共振。例如，假定二者的周期相同，即在固有振动的半个周期以內，摆和前面一样地上升和下降，而在相繼的半个周期內，摆長不变，余类推（圖 122），这时，

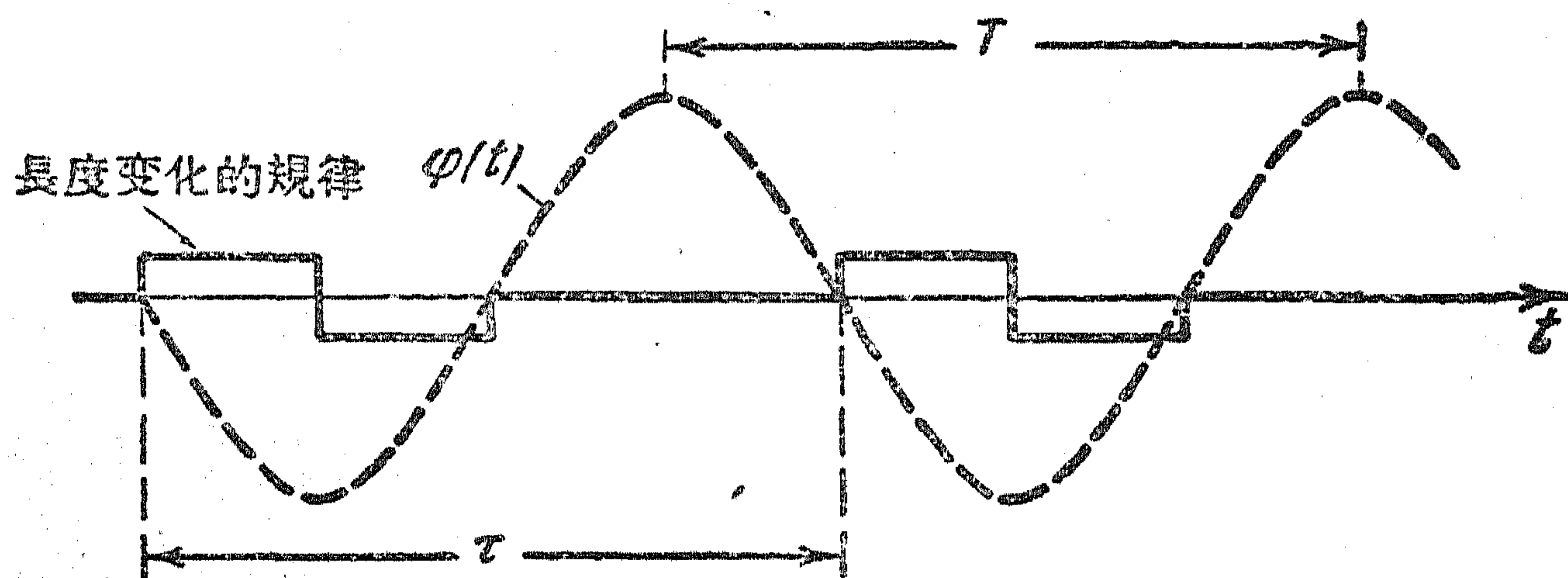


圖 122.

也可能有参数振动。

記起条件 (39.7) 时，便得出結論，在这种情形下，参数共振的条件是：

$$\frac{3a}{l_0}>2\vartheta, \qquad (40.1)$$

因为能量仅仅在半个周期內被傳給摆，故在同样的阻尼下，所需要的参数的調制度比前面的情形(§ 41)要大，在前面的情形中，参数变化的周期等于固有振动周期的一半。

当参数变化的周期 τ 等于 $\frac{3}{2}T$，即等于固有振动周期的一个半时，例如，假使摆的荷重在固有振动的每 $\frac{3}{2}$ 周期內，上升和下降一次时(圖 123)，在这种情形下，也可能有振动的激励。此时，参

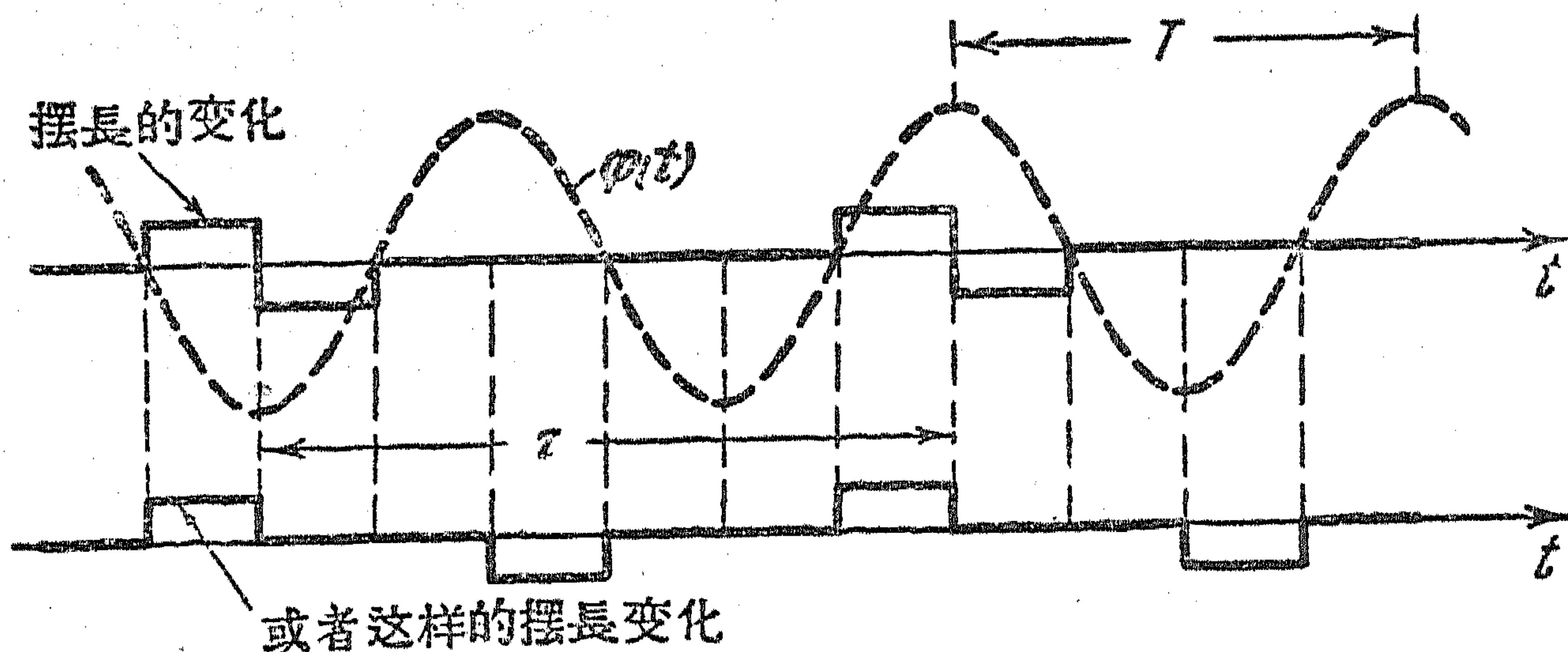


圖 123.

数共振的条件將具有下列形式，

$$\frac{a}{l_0} > \vartheta. \qquad (40.2)$$

同样的推理可以証明，假如参数变化的周期 τ 滿足下列的等式：

$$\tau \approx n\frac{T}{2}, \text{其中 } n=1, 2, 3\cdots \qquad (40.3)$$

在一定的相位关系下，也可能有参数共振，可以認为，假如条件(40.3)得到近似的滿足时，便会發生参数共振的現象，或者可以認为，存在着一定的参数調制的頻率区域，在这个区域內，可能出現参数共振。

§ 41. 对簡要計算的評論

前面几节所講的关于参数振动的分析是太簡化了，我們曾經

認为参数变化具有突变的形狀，并与固有振动間有一定的相位关系。关于参数突变形狀的假定，应該仅仅对公式有些影响，而不应該具有原則性的意义。就是在参数均匀变化时，現象仍然保持着同样的特性。

但是，“相位”却具有原則性的意义。其实，如果变化調制和固有振动間的相位关系，那末所得到的將不是振动的增長，而相反的，將是振动的衰減。因此，当参数共振时，对于增長振动，必須有参数調制相对于固有振动的“正确相位”。

然而实际上，由于偶然因素的作用，在系統中会产生一些小的固有振动，这些固有振动具有各种起始相位。因为在一些偶然产生的固有振动之中，总会有那种相位是“正确的”；而当調制周期和調制度滿足增長振动的条件时，又总会發生增長振动；于是，振动將增長起来。

現在讓我們从定性方面来看看，假如参数調制的頻率与参数共振(40.3)的頻率略有差別时，应該預期到什么。

在这种情形下，在某一段时間內，参数振动的“相位”將有助于系統中振动的增長，于是振动便增長起来。往后，参数調制与振动之間在相位上的“失諧”会加大，于是振动停止增長，外力所作的功將等于零。此后將有一段时間，参数調制与振动之間的相位具有这样的値，在这种値时，外力將作有害的功，于是振动被減弱从而衰減下去。在系統中产生类似“拍”的振动。但哪一个占优势呢，是增長还是衰減，用这样簡單的推理是無法确定的。我們將現象过于簡化了，以致缺乏应有的根据。只有由現象的准确数学理論才可以最后解出这一問題。

§ 42. 参数振动数学理論中的一些知識

在这里我們不能深入到詳尽的理論，而仅仅指出数学理論中

的某些知識，并在下一节里指出确定参数共振边界(或者区域)的最簡單的方法。

在一般形式下，在具一个自由度的系統中，参数振动的方程式具有这种形式：

$$\ddot{x}+\psi_1(t)\dot{x}+\psi_2(t)x=0, \tag{42.1}$$

其中 x 为未知函数，而 $\psi_1(t)$和 $\psi_2(t)$是具有周期 τ 的已知周期函数。

用下列代換

$$x=ue^{-\frac{1}{2}\int\psi_1 dt}$$

可以將(42.1)变換为这种方程式：

$$\ddot{u}+\Phi(t)u=0, \tag{42.2}$$

其中 $$\Phi(t)=\psi_2(t)-\frac{1}{2}\dot{\psi}_1(t)-\frac{1}{4}\psi_1^2(t).$$

因此，假如知道关于無阻尼系統的具周期性系数的方程式的解时，在原則上，总可以进行阻尼(即令是周期性变化的阻尼)系統的分析。

对于方程式

$$\ddot{u}+\Phi(t)u=0, \tag{42.2}$$

如由数学理論中推出的，有下列形式的通解：

$$u(t)=e^{\lambda_1 t}\varphi_1(t)+e^{\lambda_2 t}\varphi_2(t), \tag{42.3}$$

其中 λ_1 和 λ_2 是常数，称为方程式的“特性指数”，而 $\varphi_1(t)$和 $\varphi_2(t)$是具有周期 τ 的周期函数。

对于物理分析而言，确定了 λ_1 和 λ_2，或者甚至仅仅确定这些特性指数的实数部分，常常便够了。假如仅仅确定了 λ_1 和 λ_2 的实数部分，那末，就已經知道产生参数共振的条件。

§ 43. 参数共振区域的确定

和我們在前面几节里所作的假定一样，例如，如圖 121 所示，假定摆長作具有周期 τ 的突变。那末，根据(42.3) 可以写出由下列形式的單元所構成的通解。

$$u(t+\tau)=e^{\lambda\tau}u(t). \tag{43.1}$$

其实根据(42.3)：

$$u(t)=e^{\lambda t}\varphi(t),\quad 这里\ \varphi(t+\tau)=\varphi(t),$$

因此　$u(t+\tau)=e^{\lambda t}e^{\lambda\tau}\varphi(t+\tau)=e^{\lambda\tau}e^{\lambda t}\varphi(t)=e^{\lambda\tau}u(t).$

因此，(43.1)形式的解，經过一个周期 τ 以后，作下列常数乘数的变化：

$$\alpha=e^{\lambda\tau}. \tag{43.2}$$

显然，假如 $|\alpha|>1$，則振动將随时間而增加。

当長度作突变时(圖 121)，摆的运动的方程式可以写为：

当 $0<t<\frac{1}{2}\tau$ 时

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l_0-\frac{a}{2}}\varphi=0, \tag{43.3}$$

当 $\frac{\tau}{2}<t<\tau$ 时

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l_0+\frac{a}{2}}\varphi=0.$$

假如用表示符号：

$$\omega_1^2=\frac{g}{l_0-\frac{a}{2}},\quad \omega_2^2=\frac{g}{l_0+\frac{a}{2}}, \tag{43.4}$$

那末，在每段时間内，解可以写为：

当 $0<t<\frac{1}{2}\tau$ 时

$$\varphi_1 = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t, \tag{43.5}$$

当$\frac{\tau}{2}<t<\tau$时

$$\varphi_2 = A_1\cos\omega_2 t + B_1\sin\omega_2 t.$$

綫性方程式的这兩个解的和，可以看作是具周期性变化参数的方程式的解。为此，必須使这些解滿足下列各条件：

$$\varphi_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=\varphi_2\left(\frac{\tau}{2}\right),\quad \alpha\varphi_1(0)=\varphi_2(\tau),$$

$$\dot\varphi_1\left(\frac{\tau}{2}\right)=\dot\varphi_2\left(\frac{\tau}{2}\right),\quad \alpha\dot\varphi_1(0)=\dot\varphi_2(\tau). \tag{43.6}$$

条件(43.6)要求着解和解的导函数的連續性，以及在經过一个周期以后，解“增加”一个(43.2)的乘数 α。有兴趣的是，能知道所有 α 的值与系統参数間的依存关系。如果能找到这一关系，那末，产生参数共振的条件便已經确定。

將 φ_1 和 φ_2 代入条件(43.6)后，我們得到下列等式：

$$A\cos\frac{1}{2}\omega_1\tau + B\sin\frac{1}{2}\omega_1\tau - A_1\cos\frac{1}{2}\omega_2\tau - B_1\sin\frac{1}{2}\omega_2\tau = 0,$$

$$-A\omega_1\sin\frac{1}{2}\omega_1\tau + B\omega_1\cos\frac{1}{2}\omega_1\tau + A_1\omega_2\sin\frac{1}{2}\omega_2\tau -$$

$$-B_1\omega_2\cos\frac{1}{2}\omega_2\tau = 0, \tag{43.7}$$

$$A\alpha - A_1\cos\omega_2\tau - B_1\sin\omega_2\tau = 0,$$

$$B\omega_1\alpha + A_1\omega_2\sin\omega_2\tau - B_1\omega_2\cos\omega_2\tau = 0.$$

方程組(43.7)是关于常数 A,B,A_1 和 B_1 的四个齐次方程式的組，这个組仅仅在这种情形下，即假如下列行列式等于零时，才有非零解

$$\begin{vmatrix} \cos\frac{1}{2}\omega_1\tau & \sin\frac{1}{2}\omega_1\tau & -\cos\frac{1}{2}\omega_2\tau & -\sin\frac{1}{2}\omega_2\tau \\ -\omega_1\sin\frac{1}{2}\omega_1\tau & \omega_1\cos\frac{1}{2}\omega_1\tau & \omega_2\sin\frac{1}{2}\omega_2\tau & -\omega_2\cos\frac{1}{2}\omega_2\tau \\ \alpha & 0 & -\cos\omega_2\tau & -\sin\omega_2\tau \\ 0 & \alpha\omega_1 & \omega_2\sin\omega_2\tau & -\omega_2\cos\omega_2\tau \end{vmatrix} = 0.$$

(43.8)

行列式(43.8)是关于 α 的二次方程式。把行列式展开后，它可以写为：

$$\alpha^2-2P\alpha+1=0, \tag{43.9}$$

其中
$$P=\cos\frac{1}{2}\omega_1\tau\cos\frac{1}{2}\omega_2\tau-\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\sin\frac{1}{2}\omega_1\tau\sin\frac{1}{2}\omega_2\tau. \tag{43.10}$$

(43.9)的解为：

$$\alpha_{1,2}=P\pm\sqrt{P^2-1}.$$

注意到 $\alpha_1\alpha_2=1$ 和 $\alpha_1+\alpha_2=2P$。

当 $P>1$ 时，根为正实数，并有一个根大于 1。因此，当 $P>1$ 时，在系統中可能有增長的解。当 $P<-1$ 时，根为实数，而有一个根是負的，就絕对值説这个根大于 1，在这种情形下，解也將是增長的，但經过一个周期 τ 后，振动的相位变更自己的符号。

当 $-1<P<+1$ 时，α 的解將是复数，这时 $|\alpha_1|=|\alpha_2|=1$。其实在这种情形下

$$\alpha_1=P+i\sqrt{1-P^2},\quad \alpha_2=P-i\sqrt{1-P^2}.$$

由此得：$|\alpha_1|=|\alpha_2|=1$。这就是說，在这种情形下解將不是增長的。

因此，当 $P=1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=1$，以及当 $P=-1$ 时，$\alpha_1=\alpha_2=-1$；或者当 $|P|=1$ 时，解是純周期性的。同时当 $P=1$ 时，解將具有周期 τ；而当 $P=-1$ 时，周期將等于 2τ。

这样一来，条件 $|P|=1$ 便代表参数的这样的値，这时，系統处于增長解区域的边界上，处于参数共振区域的边界上。

引用下列表示符号：

$\omega_0^2=\dfrac{g}{l_0}$——摆的平均固有頻率的平方；

$\varepsilon=\frac{a}{2l_0}$——摆長的調制度；

$\gamma=\frac{\tau}{T}=\frac{\omega_0\tau}{2\pi}$——参数調制周期与摆長等于 l_0 时摆的固有振动周期的比。

記得(43.4) 中固有頻率 ω_1 和 ω_2 的定义，我們把它用新的表示符号写为：

$$\omega_1\tau=\frac{\omega_0\tau}{\sqrt{1-\varepsilon}}=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}},$$

$$\omega_2\tau=\frac{\omega_0\tau}{\sqrt{1+\varepsilon}}=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}},$$

$$\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

P 的表达式(43.10)現在可以写为：

$$P=\cos\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}}\cos\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}}-\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\sin\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon}}\sin\frac{\pi\gamma}{\sqrt{1+\varepsilon}}. \tag{43.11}$$

参数共振区域的边界由条件 $|P|=1$ 来决定。

不难确信，当 $\varepsilon\to 0$ 时，边界条件將具有下列的形式。

$$\cos 2\pi\gamma\to\pm 1, \tag{43.12}$$

这一条件可以在

$$\gamma=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2\cdots$$

的情况下成立。因此，在平面(ε,γ)上，与周期性解相对应的曲綫，將与 γ 軸相交于点$\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}\cdots$ (圖 124)。在圖 124 上，划綫的区域对应于这种 ε 和 γ 的値，在这种値时 $|P|>1$，或者說会發生参数共振。划綫区域的边界对应于 $|P|=1$，它提供这种 ε 和 γ 的値，这时会有周期性的解。在$\gamma=\frac{1}{2}$, $\gamma=\frac{3}{2}$, $\gamma=\frac{5}{2}\cdots$等点附近的

参数共振区域的边界与 $P=-1$ 相对应，因而，屬于这些边界的点的运动周期，將等于 2τ，即等于兩个参数变化的周期。而在 $\gamma=1$, 2, 3, …点的附近的参数共振区域的边界，則与 $P=1$ 相对应，也就是与具有参数变化的周期 τ 的周期性的解相对应。

計算指出，随着 ε 的增加，参数共振的区域会扩大，不仅当頻率剛好重合时，并且当这些頻率相近时，都可能有共振。而随着 γ 的增加，参数共振的区域縮小，假如大致确定了当 ε 值微小时靠近 $\gamma=\frac{1}{2}$, 1…等点的参数共振区域的边界，便不难看出这些。圖 124 上的虛綫指出了这些边界：靠近 $\gamma=\frac{1}{2}$ 时，这些边界是相交的兩条直綫，而靠近 $\gamma=1$ 时，这些边界是相切于点 $\gamma=1$ 的兩段抛物綫。这些边界的方程式已写在圖 124 上。

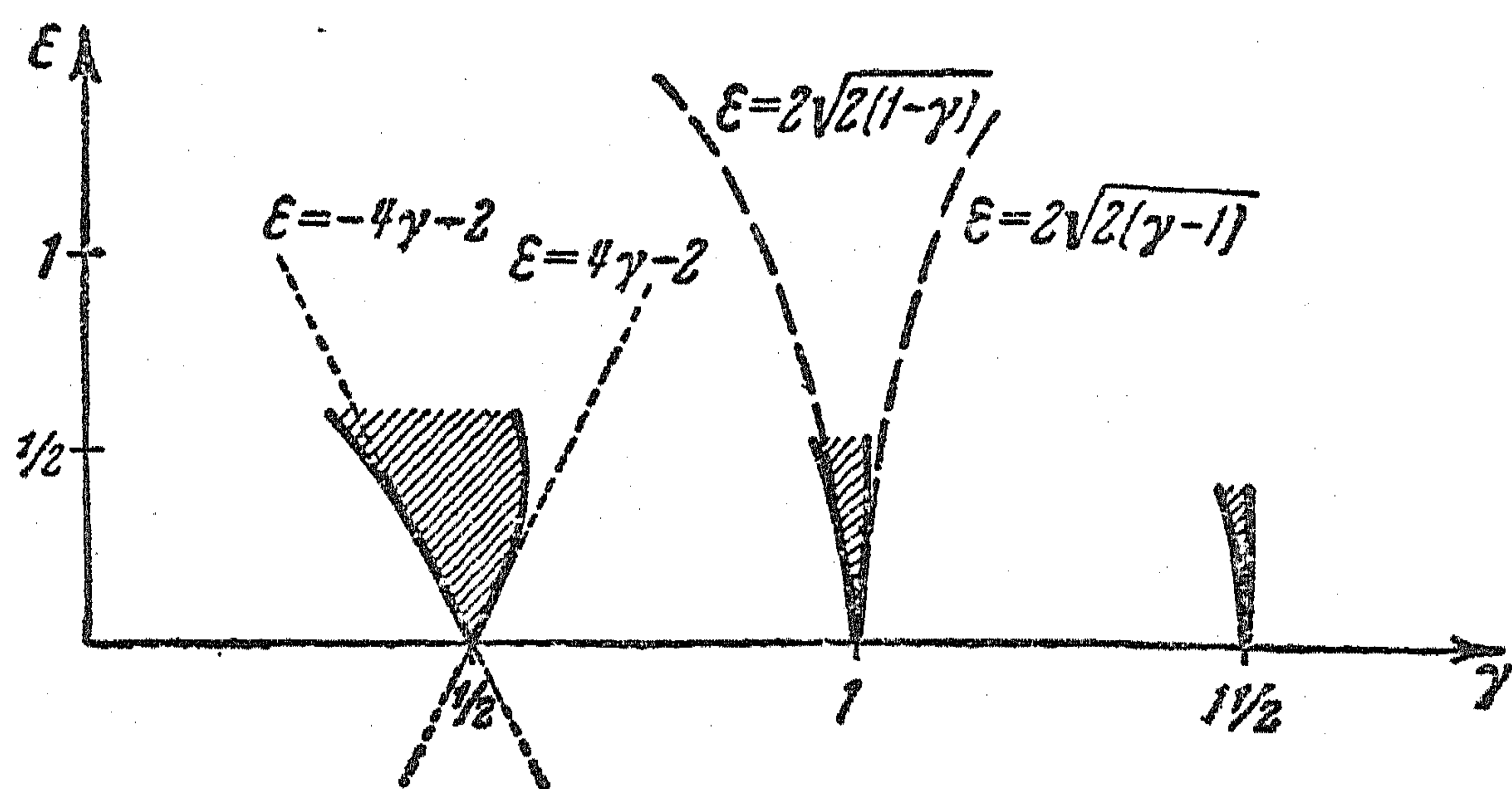


圖 124.

系統中有阻尼出現，会使参数共振的区域縮小。

应該注意的是，对于参数突变的全部数学計算，是在沒有任何近似的情形下作出的，因此这里所述的也适用于任何 $\varepsilon<1$ 的值的情况。在参数作正弦变化的情形下，当 ε 微小时，用逐步逼近法来大致确定参数共振区域的边界最为簡單。

§ 44. 参数振动的例子

参数振动在技术中是相当常見的，在無綫电技术中有很多設备都与电迴路中的参数共振現象有关。

曼杰尔席塔姆-巴巴列克斯参数机器在电工学中是大家知道的。这种机器可当作交流發电机用。它的結構原理表示在圖 125 上。

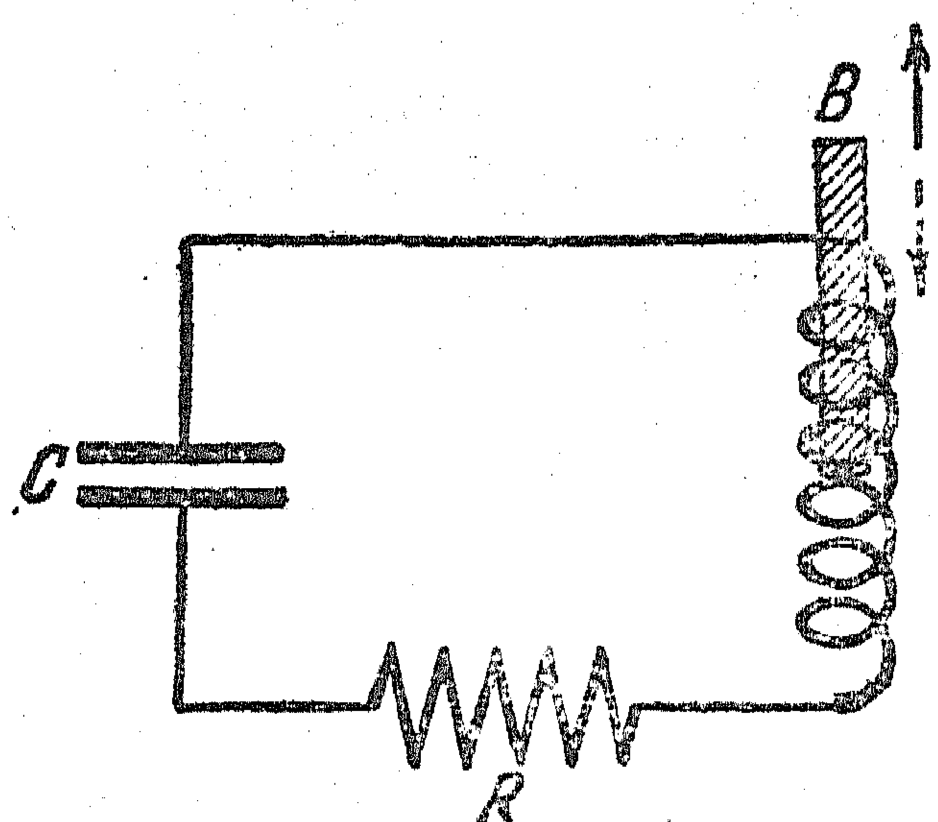


圖 125.

將鋁条 B 周期地放入电迴路的綫圈中，放入的頻率与 $\gamma=\frac{1}{2}$ 对应，即接近于迴路固有頻率的一倍，欧姆律电阻 R 代表負載。当然，在作試驗用的机器模型中，迴路电感量的調制，是用技术上比較方便的方法来实現的，例如，使一有齿的鋁盤旋轉就是一种方法。

在这种机器中，电流的振动是具有恒定振幅的周期振动。我們未曾研究过的非綫性的規律，使得当参数共振时稳定的周期振

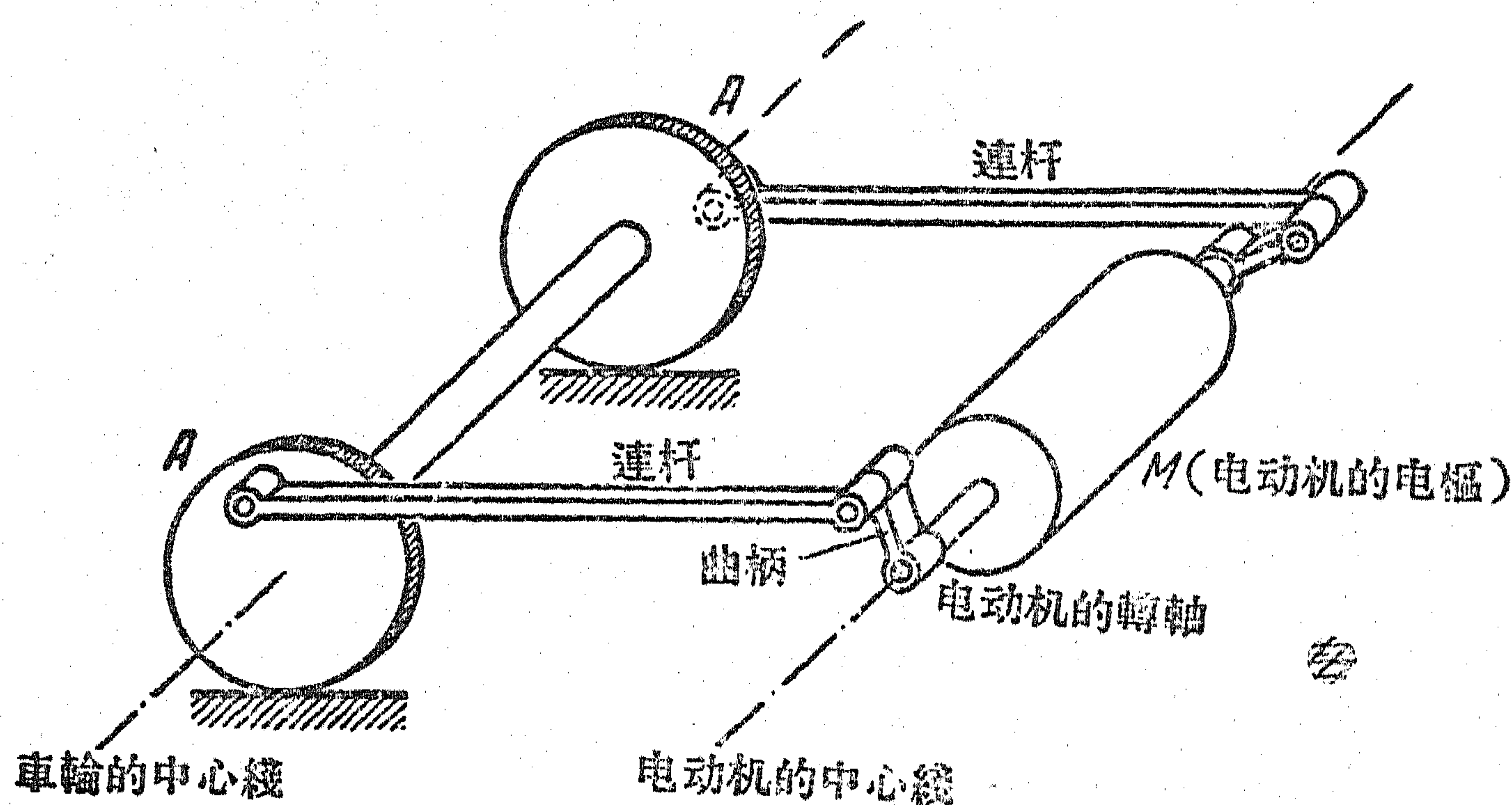


圖 126.

动能够存在。

还可以举一个在电气机車車輪軸中的振动的例子。由电动机到車輪的傳动設备的原理圖如圖 126 所示。电动机的轉軸通过在其兩端的曲柄以及連杆和車輪相連接。在运行时，点 A 作圓周运动(对于車輛)。現在来研究軸，曲柄，連杆的彈性和电樞的慣量所引起的电樞 M 的扭轉振动。可以証明：整个系統的剛度系数依存于点 A 在輪子周界上的位置，因此，电樞扭轉振动的頻率，在車輛运行时，將周期地变化着。

当車輛的速度与参数共振的区域对应时，便产生十分强烈的振动，这常常引起事故。而研究参数振动的規律則可以消除上述系統的損坏与事故。

第八章　自动振动

§ 45. 关于自动振动的一般知識

在第一章的 § 6 中，我們研究过可能产生具有增長振幅的近似正弦振动的系統。在这种系統中可能有自动振动的过程。

自动振动与其他振动过程的原則性区别在于：在这种系統中，为了維持稳定的狀态，不需要周期性的外来作用。提琴的弓作等速运动时，它的弦的振动，無綫电波振蕩器的振动，風琴管中的振动，鐘摆的振动等等，都是自动振动过程的典型例子。

任何現实系統中，在發生駐常的振动过程时，能量都或者轉換为热或者傳給周圍其他的物体。因此每一个自动振动系統，应該具有补償其消耗的能量来源。通常能源所供給的是不随时間变更的恒定作用，而自动振动系統的設备却是这样的，它使得当振动时，能源給出交变的作用，就是这作用維持着駐常的振动过程。交变作用保証了所必需的能量流入，借以补償在振动时的損失。

当分析自动振动系統时（固然，不是所有的情形都要这样，下列兩基本單元宜加区别：1）基本振动系統，2）控制能源的“反饋”。基本振动系統是給定自动振动頻率的一个环节。这一系統在隔离的狀态下可以作阻尼的固有振动。反饋則將基本振动系統和能源联系起来。在基本振动系統中的振动影响能源，而能源給出交变的力，經过反饋，作用于基本系統中的振动。

我們拿一个簡單的电子管振蕩器的綫路（圖 127），来作为一个例子。

含有 L, R, C 并位于电子管板極电路中的振动迴路代表着基本振动系統。綫圈 L' 和电子管組成反饋电路。

产生振动的动作可以設想为这样：由于某个微小的、偶然的冲击，在 LC 迴路中产生了固有振动；固有振动通过綫圈 L' 作用于电子管的柵極上，从而改变了流过电子管与迴路的电流 i_a。当电流 i_a 的振动流过迴路时，其中的振动便会加强。于是，迴路中振动的振幅开始增長，直增到这样的値：即当板流振动到达特性曲綫的弯曲处时，这时，板流的振动，因而也就是振蕩器中的振动，才停止增長。振动增長的过程称为自激。在稳定的自动振动的过程中，振动时的全部能量損失是由板極电池来补偿的。

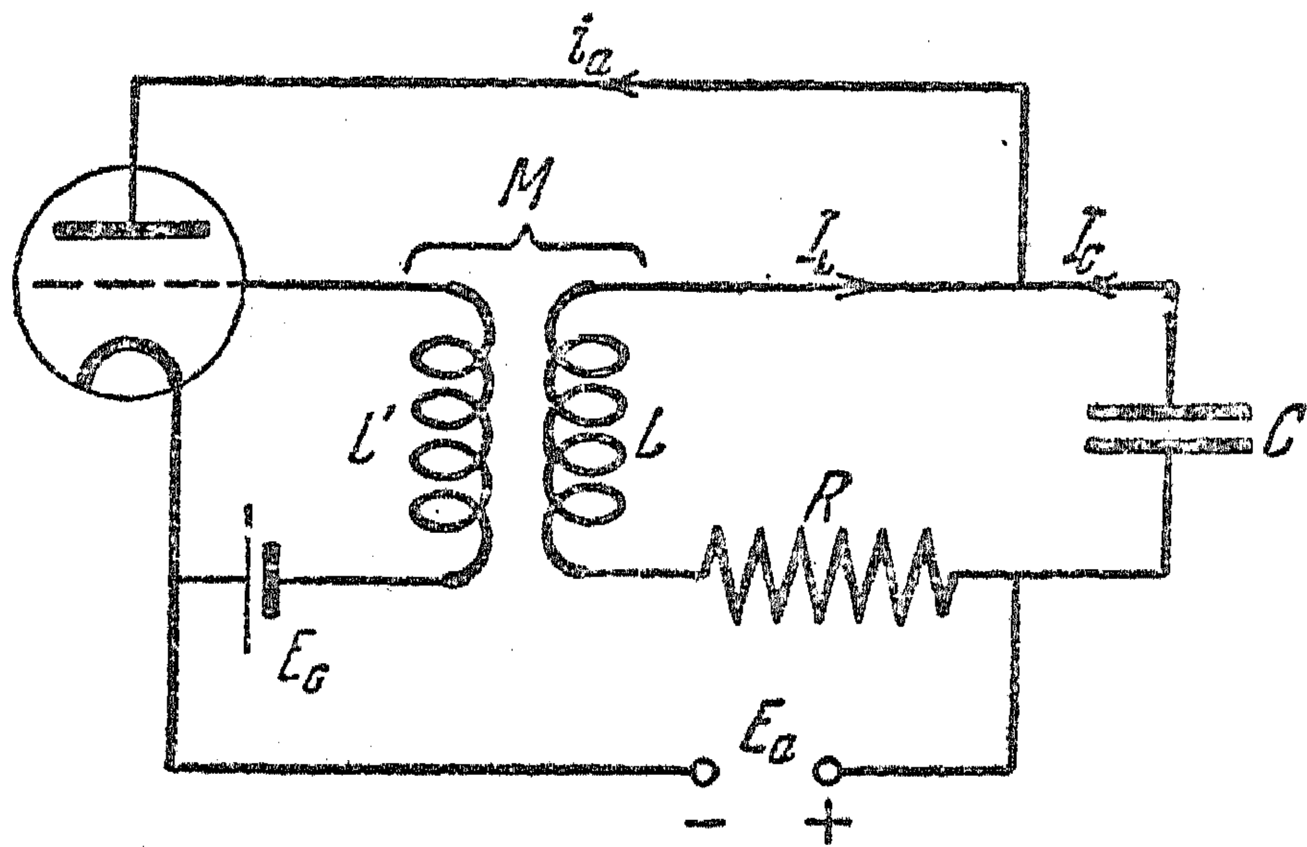


圖 127.

自动振动过程的基本特征为：

1）振动的"自激"。

2）稳定的自动振动的振幅和頻率仅仅依存于系統的参数。

3）自动振动相位的任意性。

这里，宜于回想一下，当固有振动时，頻率决定于系統的参数；而振幅与相位则决定于起始条件。当受迫振动时，頻率决定于外力；而振幅与相位則决定于系統和外力。

§ 46. 电磁振蕩器

振蕩器的綫路如圖 127 所示，而自动振动自激的条件已于 § 6 中导出。現在来詳細研究振蕩器中的振动理論。

假令由于某种原因在迴路中产生了振动，那末，它將發生在系統的所有的电路中。用 I_C 表示流过电容器的电流，I_L 表示流过迴路綫圈的电流，i_a 表示电子管的板流。耦合綫圈以及迴路的参数

則如圖 127 所示。現在，写出迴路的电压方程式:

$$L\dot{I}_L+RI_L-\frac{1}{C}\int I_C\,dt=0, \tag{46.1}$$

以及在分支处电流相等的条件:

$$i_a=I_L+I_C. \tag{46.2}$$

和通常一样，用 $\omega^2=\frac{1}{LC}$ 以及 $2\delta=\frac{R}{L}$ 表示，并由(46.1)和(46.2)中消去 I_C 后，我們便得到振蕩器的基本方程式:

$$\ddot{I}_L+2\delta\dot{I}_L+\omega^2I_L=\omega^2i_a. \tag{46.3}$$

电子管的板流 i_a 决定于其柵極与陰極間的电位差 V_c，以及板極与陰極間的电位差 V_a; i_a 是 V_c+DV_a 的函数，其中 D 为常数。量

$$V_y=V_c+DV_a \tag{46.4}$$

称为控制电压，而 D 是"滲透率"。

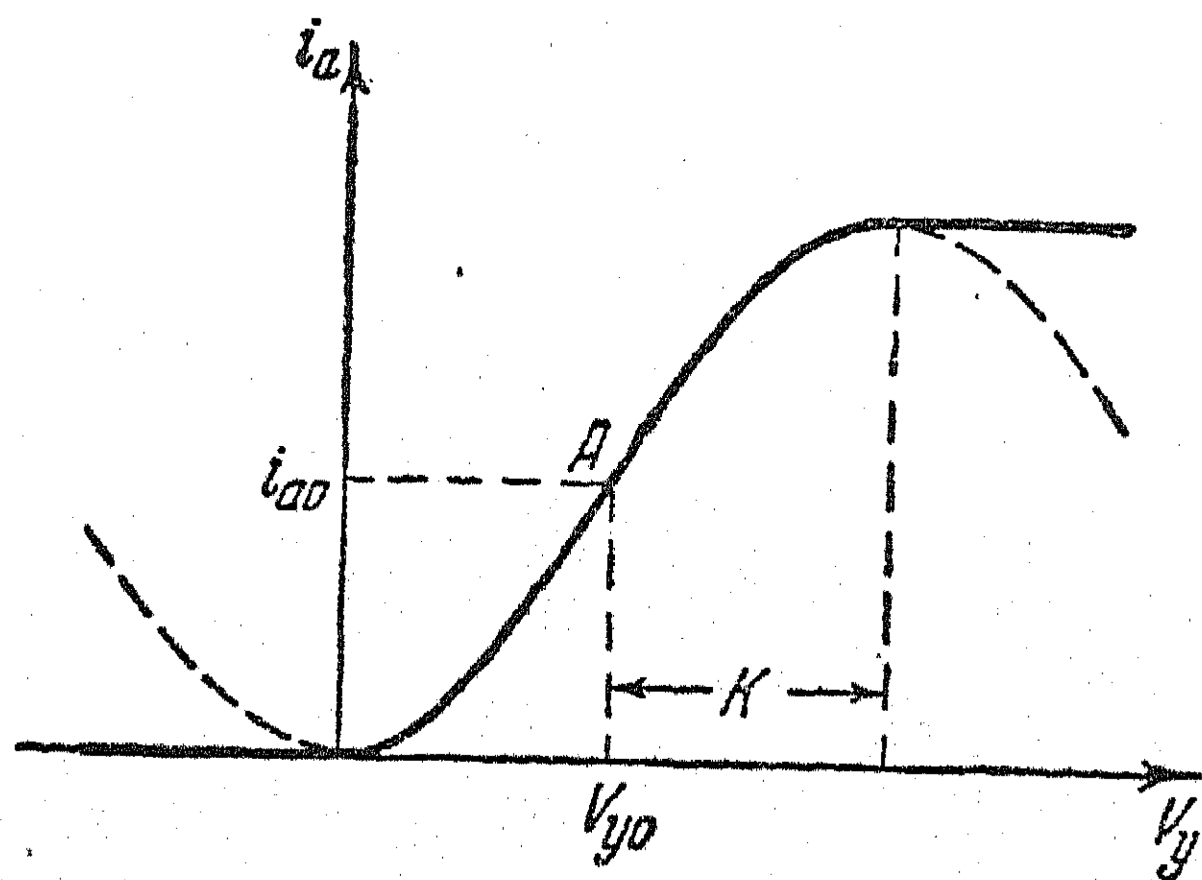


圖 128.

i_a 和 V_y 的依存关系一般是非綫性的，并具有大概如圖 128 所示的形式。在电子管特性曲綫上的点 A 称为"工作点"，它对应于电子管在無振动狀态下。如果迴路的欧姆律电阻可以忽略的話，那末，在工作点的控制电压为:

$$V_{y0}=E_C+DE_a, \tag{46.5}$$

其中 E_c 是柵路电池的直流电压，而 E_a 是板路电池的直流电压。

当把工作点选擇在特性曲綫的中点时，对于振蕩器的数学分析，可以用下列形式的三次多項式来近似代表电子管特性曲綫的工作段:

$$i_a = i_{a0} + S\left[\Delta V - \frac{(\Delta V)^3}{3K^2}\right], \qquad (46.6)$$

其中 $\Delta V = V_y - V_{y0}$ 是控制电压与直流电压 V_{y0}——平衡电压——的差。(46.6)的理論曲綫用虛綫在圖 128 上表出。

常数量 S 和 K 由电子管的性質来决定：S 是互导，一般用毫安/伏来量計，它代表在工作点 A 处的电流对电压的导函数；K 是"飽和电压"，由公式(46.6)中可以看出，它等于当 $di_a/d(\Delta V)=0$ 时的 ΔV 的値。

注意到根据公式(46.6)的理論曲綫，仅仅在点 A 附近的某一段，大概大小为 $2K$ 的一段上，才与現实的依存关系相接近。如果在振动时，电流和电压大大的超出了这一段的范圍，那末，以(46.6)为根据所作出的理論，已經不能在量的方面反映振蕩器中的过程。然而，这种考虑到板流与控制电压間的非綫性依存关系的"粗略的近似"理論所反映的現实过程，比我們在前面(§6)曾研究过的、假定在 i_a 与 V_y 間具有綫性依存关系的理論所反映的現实过程，仍然要正确得多。

假如工作点不是选擇在特性曲綫的中点，那末，要用多項式足够近似地来代表特性曲綫(圖 128)，就必須在(46.6)中加上一些包含二次以及其他次的項。

讓我們来确定在控制电压和迴路中振动之間的关系。按圖 127 所示的綫路可以看出，在电子管的板極上的电压 V_a 等于：

$$V_a = E_a - L\frac{dI_L}{dt} - RI_L. \qquad (46.7)$$

假定在过程进行时，柵流等于零，那末，在电子管柵極上的电压为：

$$V_c = E_c \pm M\frac{dI_L}{dt}. \qquad (46.8)$$

在公式(46.8)中，耦合系数 M 的前面有兩个符号，这是因为当不改

变兩綫圈的位置，而对調其中一个綫圈的接头时，会使耦合系数M的符号發生变化。

將(46.7)及(46.8)代入控制电压的公式(46.4)后，我們得到：

$$V_y=V_c+DV_a=E_c+DE_a+(\pm M-DL)\frac{dI_L}{dt}-DRI_L. \tag{46.9}$$

考慮到(46.5)，控制电压的变化可以写成：

$$\Delta V=(\pm M-DL)\frac{dI_L}{dt}-DRI_L. \tag{46.10}$$

假設在振蕩器中發生頻率接近于固有頻率 ω 的正弦振动过程，或者接近于正弦振动的过程，那末，便可以忽略(46.10)中的后面一項。其实 $DLdI_L/dt$ 具有振幅 $DL\omega I_{L0}$，其中 I_{L0} 为电流的振幅，后一項具有振幅 DRI_{L0}。則当 $Q=\frac{\omega L}{R}$ 时，后一項为前一項的Q分之一。

引用新变量 $x=I_L-i_{a0}$，并考慮到电子管的特性曲綫(46.6)以及(46.10)，則振蕩器方程式(46.3)經过变換以后，可以写成：

$$\ddot{x}+\omega^2x=(\alpha-\gamma\dot{x}^2)\dot{x}, \tag{46.11}$$

其中为了簡潔起見，采用了下列表示符号：

$$\alpha=\omega^2(\pm MS-LSD-RC),$$
$$\gamma=\omega^2\frac{S(\pm M-LD)^3}{3K^2}. \tag{46.12}$$

方程式(46.11)是含有 $\dot{x}$ 的三次方的非綫性微分方程式。因此，分析振蕩器中的过程归結到对非綫性微分方程式(46.11)的解答和研究。

在轉向这一問題之前，我們指出：关于振蕩器中振动的激励，或者如人們常說的，“振动的自激”——这一重要的实际問題，(在这种情况下)可以由研究方程式(46.11)的綫性近似而得到解決。

綫性近似是令(46.11)中的 $\gamma=0$ 而得到的，它的物理意义是：我們暫时只考慮在平衡狀态附近的微小振动，这时便可以認为电子管特性曲綫(46.11)是直綫(参看圖 128)。

因此，我們可以把(46.11)改写为：

$$\ddot{x}-\alpha\dot{x}+\omega^2 x=0, \tag{46.13}$$

由这一方程式可以看出，如果 $\alpha>0$ 或者根据(46.12)

$$MS-LDS-RC>0, \tag{46.14}$$

振动便会增長。LDS 一項一般很小，因此，和以前（§6）一样，我們得到"自激的条件"：

$$M>\frac{RC}{S} \text{ 或者 } S>\frac{RC}{M}. \tag{46.15}$$

当振蕩器在陰極—柵極电路內具有振动迴路，而反饋綫圈在板極电路时（圖 129），振蕩器的方程式，在同样的假設下將具有某种另外的形式。如果取如圖 128 上所繪的由(46.6)所代表的电子管特性曲綫，那末振蕩器方程式为：

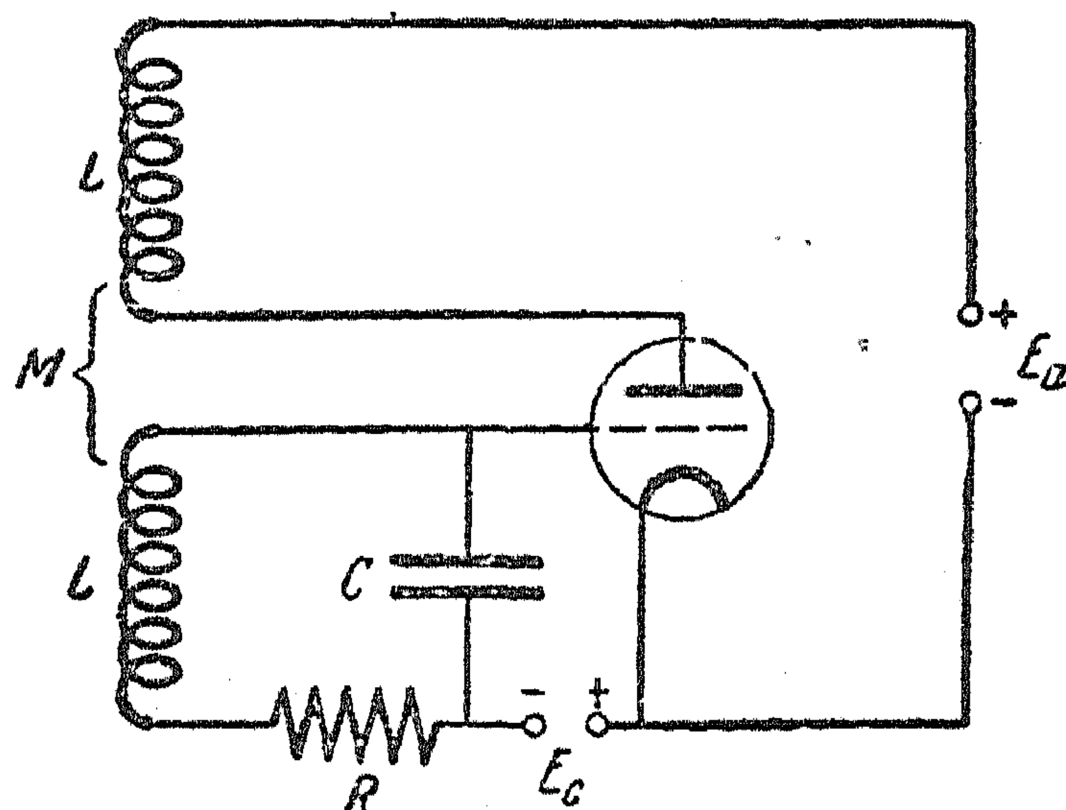


圖 129.

$$\ddot{x}+\omega^2 x=(\alpha-\gamma x^2)\dot{x}, \tag{46.16}$$

其中 x 是在迴路电容器上的电压，而

$$\alpha=\pm MS\omega^2-\frac{R}{L},$$

$$\gamma=\frac{\omega^2 MS}{K^2}. \quad 46.17)$$

如果不注意参数 α 和 γ 的値，那么(46.16)区别于(46.11)的仅仅在于非綫性項的形式：在前面的(46.11)中，非綫性項为 $\gamma\dot{x}^3$；而

現在在(46.16)中，非綫性項为 $\gamma x^2\dot{x}$。这里建議讀者把导出方程式(46.16)当作一个習題。而我們要指出的，是当分析方程式(46.11)和(46.16)时，除了下面將提到的，在最后結果中有一些差别以外，在它們之間是沒有什么原則性的差别的。

§ 47. 振蕩器非綫性方程式的解和分析

在数学中，沒有非綫性微分方程式的正規解法。因此必須用近似的方法。

振蕩器的非綫性方程式的近似解法，是由苏联的学者和工程师研究出的：电子管振蕩器的技术設計的方法是由 M. B. 蕭列依金，A. И. 伯尔格院士以及 M. A. 波奇-伏隆叶維奇教授等人所創立；在这个方法的基础上，Ю. Б. 柯輔查列夫和另一些人，曾研究出振蕩器的"准直綫"理論；約在二十年前，H. M. 克雷洛夫院士和 H. H. 波果柳波夫教授提出了解非綫性問題，而特别是解关于电子振蕩器問題的符号方法；大概与这同时，Л. И. 曼杰尔席塔姆和 H. Д. 巴巴列克斯学派的一些物理学家和無綫电学家，以俄国著名数学家 A. M. 雅普諾夫和法国学者 A. 邦加萊的成就为基础，曾經提出分析自动振动系統非綫性方程式的特别方法。將这些方法都講一下，远远超出了本書的范圍，因此我們將仅仅講其中的几种，主要是講曼杰尔席塔姆-巴巴列克斯学派的苏联学者著作中所应用的那几种方法和"准直綫"的方法，后者在振蕩器的技术設計中，具有極大的价値。

1. 変変振幅方法

当振蕩器中的振动接近于正弦振动时，对于这种情形，変変振幅(范德波)方法是近似地解振蕩器方程式的最簡單的方法。这一方法的严格数学根据是由 Л. И. 曼杰尔席塔姆和 H. Д. 巴巴列克斯所作出的。

假設方程式(46.11)的解具有这样的形式:

$$x(t)=A(t)\cos\omega t, \tag{47.1}$$

其中 $A(t)$ 是时間 t 的"慢变化"函数。这一名称的意思是: 当时間 t 作大小为几个周期 $T_0=\frac{2\pi}{\omega}$ 的变动时, $A(t)$ 可以認为差不多是常数。

如果 α 和 γ 的値足够小时, 便不难想像这种形式下的解是正确的。其实当 $\alpha\to0$, $\gamma\to0$ 时, (46.11)的解是純諧的; 假如 α 和 γ 稍稍比零大一点时, 則(46.11)的解应該是接近于諧的; 当 α 和 γ 的値比較大时, 則(47.1)的假設不能成立。

但是在近似諧振动的振蕩器的情况中, α 与 γ 的値实际上是微小的値, 因此, (47.1)的假設总是有根据的。

$A(t)$ 变化慢的条件, 在数学上可以写为:

$$T_0\frac{dA}{dt}\ll A \text{ 或者 } \frac{dA}{dt}\ll\omega A,$$

$$T_0\frac{d^2A}{dt^2}\ll\frac{dA}{dt} \text{ 或者 } \frac{d^2A}{dt^2}\ll\omega^2 A. \tag{47.2}$$

將(47.1)代入振蕩器方程式(46.11)后, 我們得到:

$$-2\frac{dA}{dt}\omega\sin\omega t+\frac{d^2A}{dt^2}\cos\omega t=$$

$$=\left[\alpha-\gamma\left(-\omega A\sin\omega t+\frac{dA}{dt}\cos\omega t\right)^2\right]\times$$

$$\times\left(-\omega A\sin\omega t+\frac{dA}{dt}\cos\omega t\right). \tag{47.3}$$

注意到(47.2)"慢"的条件, 在經过一些簡單的三角变換以后, 可將方程式(47.3)写为:

$$\left(2\frac{dA}{dt}-\alpha A+\frac{3}{4}\gamma\omega^2A^3\right)\sin\omega t=$$

$$=\frac{1}{4}\gamma\omega^2A^3\sin 3\omega t+\text{ 几項小的項。} \tag{47.4}$$

进一步假設当存在着对于 $A(t)$ 的下列微分方程式，即所謂振幅方程式时：

$$2\frac{dA}{dt}-\alpha A+\frac{3}{4}\gamma\omega^2A^3=0, \tag{47.5}$$

函数 $A(t)$ 將代表振蕩器方程式的近似解。如果准許忽略在(47.4)中的三次頻率 3ω 那一項，則方程式(47.5)可以理解为是由(47.4)得出的。这种忽略是否正确，在这里并沒有数学根据，而在以后我們要講到的曼杰尔席塔姆-巴巴列克斯方法中得到了証明。

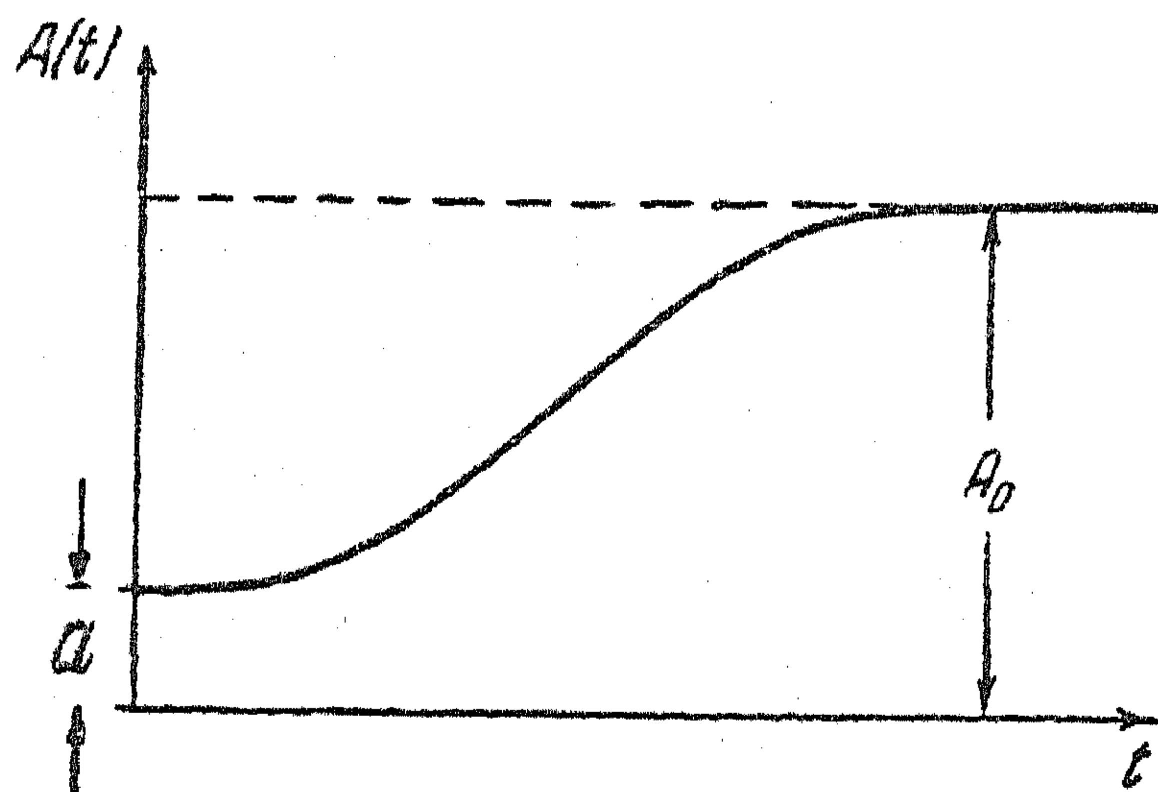


圖 130.

現在問題归結为去积分“振幅” $A(t)$ 的綫性方程式(47.5)；这积分可以写为：

$$2\int_a^A\frac{dA}{\left(\alpha-\frac{3}{4}\gamma\omega^2A^2\right)A}=t,$$

作出积分并加以变換时，我們便得到“振幅” $A(t)$ 与时間的依存关系：

$$A(t)=\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\gamma\omega^2-\left(\frac{3}{4}\gamma\omega^2-\frac{\alpha}{a^2}\right)e^{-\alpha t}}}, \tag{47.6}$$

其中 a 是起始“振幅”。当 $t\to\infty$ 时，$A(t)$ 趋于下列極限：

$$A_0=\frac{2}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}, \tag{47.7}$$

这是駐常自动振动狀态的振幅。

$A(t)$ 的圖形表出在圖 130 上。振动的振幅由某个起始値 a

起，差不多按指数規律增加，往后增加漸漸停止，振幅变为常数，振动帶有駐常的特性。在振蕩器中便产生了駐常的自动振动狀态。

我們指出，仅仅可以把駐常狀态大致設想为具有頻率 ω 和振幅 A_0 的諧振动。实际上，駐常的自动振动狀态总是非諧的，但它在形式上足够接近于由理論方法求得的諧狀态。

現在可以这样来表示振动激励的情况。由某个起始的冲击，产生了具有"振幅" a 的振动，它經过一些时間，即經过实际上十分短促的"建立时間"以后，变为駐常的自动振动。

为了要确信，当 $t\to\infty$ 时，在理論上存在的駐常周期狀态（自动振动）也在現实系統中存在，就必須研究（确定）所得到的駐常狀态的稳定性。分析(47.6)，或者更簡單一些，直接根据方程式(47.5)可以作出这种研究。

其实，令 $A(t)>A_0$，即"振幅"大于駐常振幅，那末

$$\frac{dA}{dt}<0.$$

因此，"振幅"逐漸減小，而振动狀态趋于駐常狀态。同样当 $A(t)<$ $<A_0$ 时，則总有：

$$\frac{dA}{dt}>0.$$

由任何起始值的振动"振幅" $A(t)$，都趋于駐常值 A_0。因此，在不受任何外来作用的振蕩器中，經过过渡狀态以后，都会产生稳定的駐常的周期性过程——自动振动。

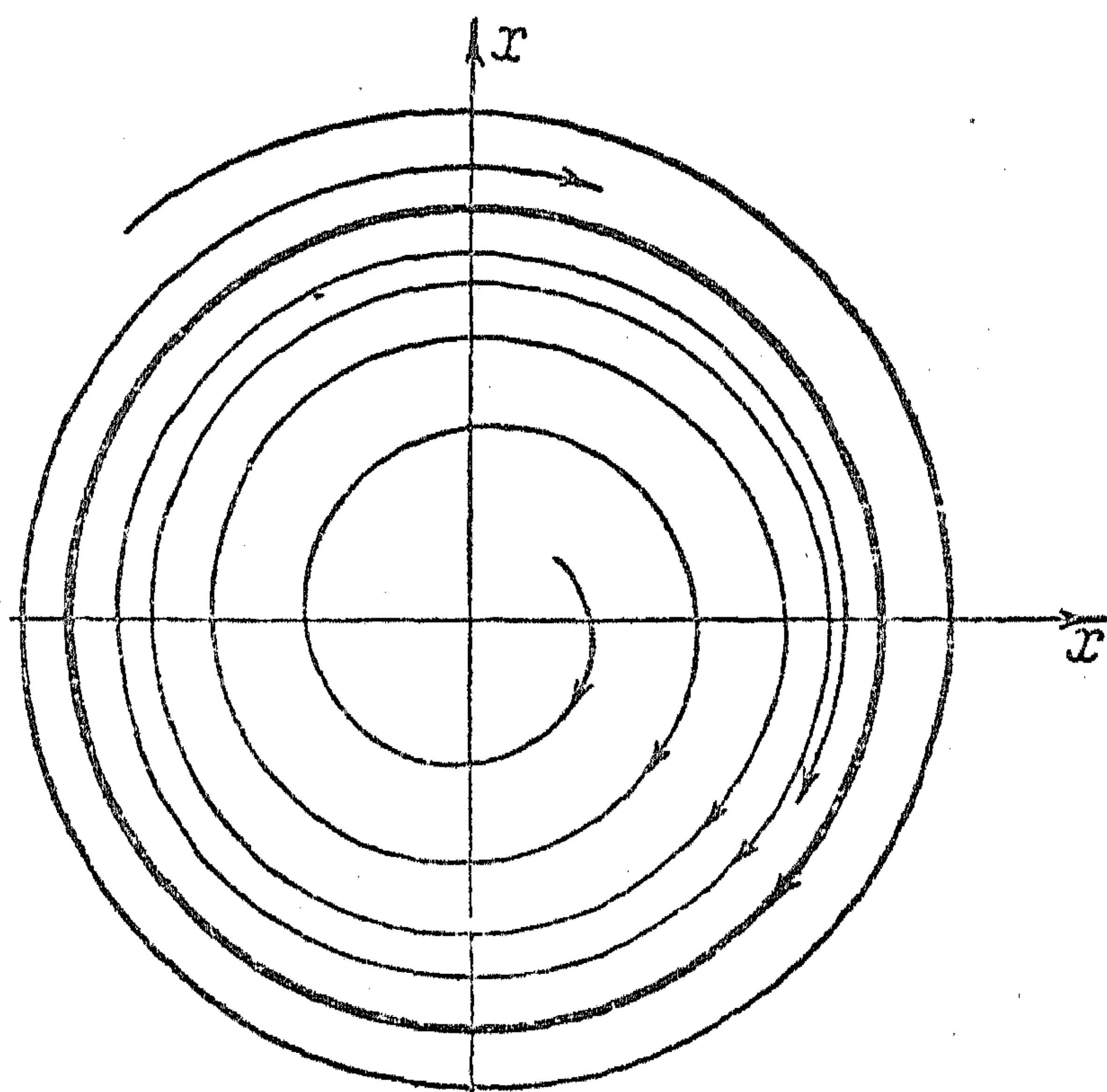


圖 131.

自动振动在相平面上

是用所謂極限圈（圖 131）来代表的。極限圈是相平面上的閉合曲綫，当 $t\to\infty$ 时，所有的积分曲綫都趋向它并以它为極限。在極限圈內面的描迹点沿着外盤螺綫趋近于極限圈；而在圈外的点的运动則沿內盤螺綫进行，也趋近于極限圈。

極限圈代表具有一定振幅的駐常狀态，这振幅不依存于起始条件，而仅仅决定于系統的構造。在相平面上有極限圈存在，一般是自动振动系統的基本标志。显然，在自动振动过程中，振动的起始相位可以是任意的，它在过程本身中，不起什么作用。

系統中实际的自动振动与正弦振动有所不同，極限圈也不是椭圓，但却是接近于椭圓的曲綫。具有振幅 A_0 的駐常諧狀态，与实际的自动振动十分接近。

因此，这一比較簡單的近似方法，对在振蕩器中所發生的物理过程的情况，正确地給出了其基本的、主要的部分，并能在实际上足够准确地确定振动的大小。

为了参考起見，我們指出，假如振蕩器在柵極—陰極电路中具有迴路（圖 129），其方程式（46.16）已在前面給出，那末其駐常狀态的振幅为：

$$A_0=2\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}},\tag{47.8}$$

而振幅方程式为：

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}A\left(\alpha-\frac{1}{4}\gamma A^2\right).\tag{47.9}$$

我們建議讀者把驗算公式（47.8）和（47.9）当作習題。

2. 曼杰尔席塔姆-巴巴列克斯方法

尽管这一节前一段中所講的分析自动振动系統的方法，是十分正确的，然而只是在苏联学者 Л. И. 曼杰尔席塔姆和 Н. Д. 巴巴列克斯發表了关于这一問題的論著以后，才可以这样断言。事实

上，前面將三次諧波忽略以后，由(47.4)得到(47.5)的基本"振幅"方程式，其理由完全不清楚。而研究自动振动时，又常常用变变振幅的方法，因此，我們現在来研究一下由曼杰尔席塔姆和巴巴列克斯所提出的，在比較一般的形式下求得近似"振幅方程式"的严格方法。

自动振动系統的方程式，例如(46.11)或者(46.16)，在一般形式下可以写为：

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\mu f(x, \dot{x}), \qquad (47.10)$$

其中 $f(x, \dot{x})$ 是 x 和 $\dot{x}$ 的某种多項式，而 μ 是"小参数，是标明式中右边部分相对值的某个小数。显然，当 $\mu \to 0$ 时，系統变为諧系統；假如 $\mu \neq 0$，但足够小，那末系統接近于諧系統。在这里我們只研究这种类型的非綫性方程式。現在假設方程式(47.10)的解可以写为：

$$x(t)=u(t) \sin \omega t-v(t) \cos \omega t, \qquad (47.11)$$

其中 $u(t)$ 和 $v(t)$ 是某种时間函数。显然，这是总可以做得到的。因为引用了兩个函数 u 和 v，那末可以还加一个补充条件，这条件我們选擇为下列形式：

$$\dot{u} \sin \omega t-\dot{v} \cos \omega t=0. \qquad (47.12)$$

將(47.11)代入(47.10)，并考慮到(47.12)，我們便得到：

$$\dot{u} \cos \omega t+\dot{v} \sin \omega t=$$

$$=\frac{\mu}{\omega} f\{u \sin \omega t-v \cos \omega t,\ \omega(u \cos \omega t+v \sin \omega t)\}, \qquad (47.13)$$

假如用 $\cos \omega t$ 乘(47.13)，用 $\sin \omega t$ 乘(47.12)后再相加，那末便得到：

$$\dot{u}=\frac{\mu}{\omega} f \cos \omega t, \qquad (47.14)$$

其中，已按照公式(47.11)和条件(47.12)將 x 及 $\dot{x}$ 的値代入函数 f 中。

完全一样的方式，用 $\sin\omega t$ 乘(47.13)，用 $\cos\omega t$ 乘(47.12)后，再相减，我們便得到第二个方程式：

$$\dot{v}=\frac{\mu}{\omega}f\sin\omega t。\tag{47.15}$$

根据条件，$f(x,\dot{x})$是多項式，因此方程式(47.14)和(47.15)的右边部分，总可以用由 $\sin n\omega t$ 以及 $\cos n\omega t$ 乘 u 和 v 的函数的形式来表示，其中 $n=0, 1, 2, 3\cdots\cdots k$，$k$ 等于多項式 f 的最高次指数。因此，方种式(47.14)和(47.15)可以写为：

$$\dot{u}=\frac{\mu}{\omega}\left\{f_1(u,v)+\sum_n\psi_n(u,v)\sin n\omega t+\varphi_n(u,v)\cos n\omega t\right\},$$

$$\dot{v}=\frac{\mu}{\omega}\left\{f_2(u,v)+\sum_n\psi_n'(u,v)\sin n\omega t+\varphi_n'(u,v)\cos n\omega t\right\}.\tag{47.16}$$

方程式(47.16)是确定函数 u 和 v 的准确方程式。

到这里止，还只是适当地完成了变数的代换，代替方程式(47.10)的，是函数 u 和 v 的兩个一阶方程式，即(47.16)，它們的关系由条件(47.12)表明。

然而，假如注意到当 μ 微小时，解接近于諧解，那末，应該預料到，在一个周期 $T_0=\frac{2\pi}{\omega}$ 的期間內，$u(t)$ 和 $v(t)$ 將作十分小的变化，因为当 $\mu=0$ 时，u 及 v 將是常数。因此在近似地确定 u 和 v 时，可以撇开方程式(47.16)中含有 $\sin n\omega t$ 和 $\cos n\omega t$ 的各項，并解所謂"縮短的"方程式：

$$\dot{u}_0=\frac{\mu}{\omega}f_1(u_0,v_0),$$

$$\dot{v}_0=\frac{\mu}{\omega}f_2(u_0, v_0), \qquad (47.17)$$

这方程式較之方程式(47.16)簡單得多。

这一方法的作者曾經严格地証明了，在一定的一段时間中——μ愈小，这段时間愈長——方程式(47.17)的解接近于(47.16)的解。証明是很簡單的，但需要很多的篇幅，因此我們把它省略掉。

建立“縮短的”方程式(47.17)的方法，到这里已經很清楚了，并常常利用它来解自动振动的問題。必須以下式代入方程式(47.10)的右边部分：

$$x=u\sin\omega t-v\cos\omega t,$$

$$\dot{x}=\omega(u\cos\omega t+v\sin\omega t),$$

再乘以 $\cos\omega t$(或 $\sin\omega t$)，然后挑出不含正弦和余弦的項来。并用这些項来代替(47.17)中右边部分的 $\mu f_1(u_0, v_0)$[或者 $\mu f_2(u_0, v_0)$]。

在用这种方法得到“縮短的”方程式来近似地确定振幅 $u_0(t)$ 和 $v_0(t)$ 时，要搞清一个問題，即为什么在方程式(47.17)中，具有 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 的項不起重要的作用。这是因为在足够多的周期 T_0 之內，函数 u 和 v 的变化很小，那末，在(47.16)中，那些具有正弦和余弦的項，在这段时間內其影响將各自抵銷掉，因为諸函数的平均値等于零。

对于在板極电路中具有迴路的振蕩器，其振蕩方程式(46.11)的縮短的方程式將具有下列形式：

$$\begin{aligned}\dot{u}_0&=\frac{1}{2}\left[\alpha u_0-\frac{3}{4}\gamma\omega^2u_0(u_0^2+v_0^2)\right],\\ \dot{v}_0&=\frac{1}{2}\left[\alpha v_0-\frac{3}{4}\gamma\omega^2v_0(u_0^2+v_0^2)\right],\end{aligned} \qquad (47.18)$$

用 $A^2=u_0^2+v_0^2$ 代入，可以导出方程式

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}A\left(\alpha-\frac{3}{4}\gamma\omega^2A^2\right),\tag{47.19}$$

这式与(47 5)完全相同。由方程式組(47.18)可以看出：

$$\frac{\dot{u}_0}{u_0}=\frac{\dot{v}_0}{v_0}.$$

因此，函数 u_0 和 v_0 之間的区别，仅仅是一个任意常系数。因而在(47.19)形式下的解，便提供了全部我們所需要的。任意常系数仅仅决定着自动振动的起始相位，而自动振动的起始相位可以为任意的值。

3. 安德罗諾夫方法（小参数方法）

关于用級数来确定和探討振蕩器方程式，即(47.10)形式的非綫性方程式的周期性解的方法，是由 A. A. 安德罗諾夫作出的。在安德罗諾夫和哈依金合著的"振动理論"一書中，詳細地叙述了这一方法。在这里，我們限于篇幅不能全面的研究安德罗諾夫方法，因此，只簡短地講一下它的原理。

依下列方式，把某个無因次的参数 μ 引入方程式(46.11)中，

$$\alpha=\mu\bar{\alpha},\quad \gamma=\mu\bar{\gamma};$$

那末(46.11)可以写为：

$$\ddot{x}+\omega^2x=\mu(\bar{\alpha}-\bar{\gamma}\dot{x}^2)\dot{x},\tag{47.20}$$

或者在一般的形式下为：

$$\ddot{x}+\omega^2x=\mu f(x,\dot{x}).\tag{47.21}$$

假如 $\mu\to0$，那末，方程式(47.21)的解趋于諧解。当 $\mu=0$ 时，方程式(47.21)的解在相平面上將由一些同心橢圓的总合来代表。假設(47.21)有某个一定的周期性的解，那末，由于当参数变动时，方程式解的变化的連續性，当 $\mu\neq0$ 而很微小时，方程式周期性的解將由某个閉合曲綫来代表，这一閉合曲綫的位置接近于当 $\mu=0$ 时的橢圓系中的某一个。假如这一橢圓被找到，那末，关于方程式

(47.21)的周期性的解就会知道得很多。

令与近似解:

$$x_0(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \tag{47.22}$$

相对应的这一椭圆是相平面上的椭圆 B (圖 132)。对应于准确的周期性解的極限圈以某种方式接近于这一椭圆，極限圈用曲綫 C 代表。我們这样来选擇时間的起点：使得在 $t=0$ 时，近似解 x_0 的描迹点位于点 1 $(A,0)$，而眞正周期性解的描迹点位于点 2 $[A(1+\beta),0]$，其中 $\beta\ll 1$。很清楚，起始点在横坐标軸上的位置沒有什么重要的意义。因此，眞正周期性的解 $x(t)$ 可以展开为下列級数:

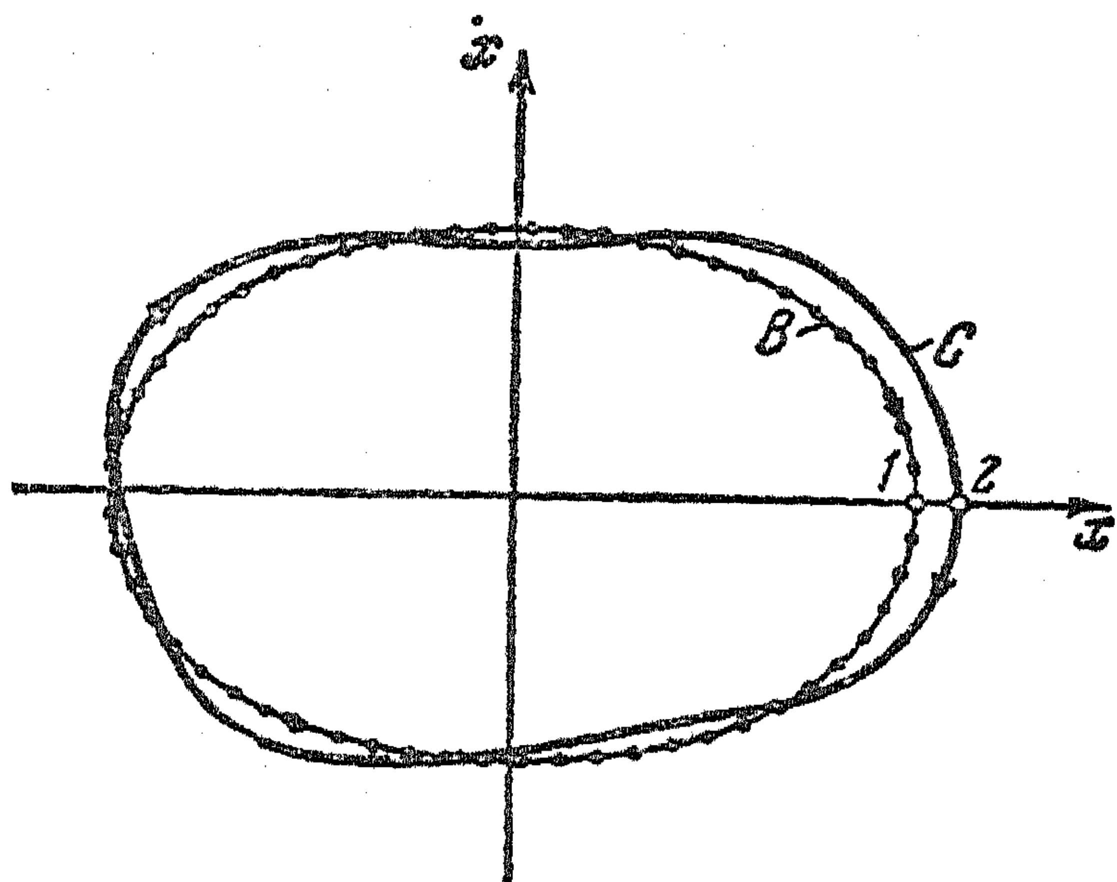


圖 132.

$$x(t)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\beta x_2(t)+\mu^2 x_3(t)+\mu\beta x_4(t)+\cdots\cdots, \tag{47.23}$$

这个解的周期为:

$$T=T_0+\tau=\frac{2\pi}{\omega}+\tau,$$

其中，当 μ 足够小时，τ 也是一个微小的值。显然，对于由点 1 及点 2 起始的运动 (圖 132)，当 $t=0$ 时，其近似解(47.22)和准确解(47.23)的起始值，可以写为:

$$x_0(0)=A,\qquad \dot{x}_0(0)=0,$$
$$x(0)=A(1+\beta),\quad \dot{x}(0)=0, \tag{47.24}$$

其中 $\beta\ll 1$，因为極限圈接近于椭圆。我們注意到:

$$\dot{x}(t)=\dot{x}_0(t)+\mu\dot{x}_1(t)+\beta\dot{x}_2(t)+\mu^2\dot{x}_3(t)+\cdots\cdots \tag{47.25}$$

因此，对于(47.23)中所包含的其余函数的起始条件將为:

$$x_1(0)=x_3(0)=x_4(0)=\cdots\cdots=0,$$
$$x_2(0)=A, \tag{47.26}$$
$$\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=\dot{x}_3(0)=\cdots\cdots=0.$$

將(47.23)代入方程式(47.20)幷令具同次 μ 的、具 β 的、具 $\mu\beta$ 的等等的項分別相等，我們便得到为了逐步确定函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, ……的下列方程組:

$$\ddot{x}_1+\omega^2x_1=(\bar{\alpha}-\bar{\gamma}\dot{x}_0^2)\dot{x}_0,$$
$$\ddot{x}_2+\omega^2x_2=0, \tag{47.27}$$
$$\ddot{x}_3+\omega^2x_3=(\bar{\alpha}-3\bar{\gamma}\dot{x}_0^2)\dot{x}_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在(47.26)和(47.24)的起始条件下，(47.27)的各方程式，可以相繼解出，从而得到了(47.23)中 $x(t)$ 的任何准确度的解。显然，方程式(47.27)的解將是:

$$x_0=A\cos\omega t,$$
$$x_1=\int_0^t(\bar{\alpha}-\bar{\gamma}\dot{x}_0^2)\dot{x}_0\sin\omega(t-\xi)d\xi, \tag{47.28}$$
$$x_2=A\cos\omega t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因此，在某一段时間內，可以把方程式(47.20)的任何一个解表出，可是我們旣是寻求周期性的解，因此，(47.23)还应該滿足下列的周期性的条件:

$$x(\tau)=x(0),\quad \dot{x}(\tau)=\dot{x}(0), \tag{47.29}$$

其中 $T=T_0+\tau$ 而 $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 是零次近似 $x_0(t)$ 的周期。

显然，$x(T)$ 可以展开为下列級数：

$$x(T)=x(T_0)+\tau\dot{x}(T_0)+\frac{1}{2}\tau^2\ddot{x}(T_0)+\cdots\cdots, \quad (47.30)$$

考虑到(47.23)和(47.25)后，上式可以写为：

$$x(T)=x_0(T_0)+\mu x_1(T_0)+\beta x_2(T_0)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+\tau[\dot{x}_0(T_0)+\mu\dot{x}_1(T_0)+\beta\dot{x}_2(T_0)+\cdots\cdots]+\cdots\cdots.$$

將这一表达式代入(47.29)中的第一个条件，并注意到(47.28)和(47.24)，我們便得到：

$$x(T)=A+\mu x_1(T_0)+\beta A+\cdots\cdots+\tau[\mu\dot{x}_1(T_0)+\cdots\cdots]+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots=x(0)=A+A\beta. \quad (47.31)$$

由此，为了要准确到使 μ 的一次項能满足周期性条件，必須这样选擇 A 的值，使得

$$x_1(T_0)=0,$$

或者根据(47.28)：

$$\int_0^{T_0}(\bar{\alpha}-\omega^2\bar{\gamma}A^2\sin^2\omega\xi)A\sin^2\omega\xi d\xi=0. \quad (47.32)$$

当完成(47.32)中的演算时，我們便得到下列形式的、决定振幅 A 的条件：

$$\bar{\alpha}-\frac{3}{4}\omega^2\bar{\gamma}A^2=0;$$

由这里，周期性解的零次近似 x_0 的振幅为：

$$A=\frac{2}{\omega}\sqrt{\frac{\bar{\alpha}}{3\bar{\gamma}}}=\frac{2}{\omega}\sqrt{\frac{\mu\bar{\alpha}}{3\mu\bar{\gamma}}}=\frac{2}{\omega}\sqrt{\frac{\alpha}{3\gamma}}. \quad (47.33)$$

因此，零次近似的振幅和前面按照交变振幅方法所得到的(47.7)具有同样的値。A 是系統在 $\mu=0$ 时的諧振动的振幅，这諧振动接近于实际的自动振动。具有振幅 A 的諧振动的椭圓接近于極限圈(圖 132)。至此，还只是零次近似地确定了自动振动的形狀，如果

有必要的話，可利用公式(47.28)来更准确地确定它。

实际上常常不需要准确地决定自动振动的形狀，而較重要的是知道周期的变化 τ。

假如写出 (47.29) 对于 $x(t)$ 的导函数的周期性条件，幷利用(47.30)，那末也可以确定 τ 的値。

其实，(47.29)的第二个条件为：

$$\begin{aligned}\dot{x}(T)&=\dot{x}(0)=0=\dot{x}(T_0)+\tau\ddot{x}(T_0)+\cdots\cdots\\ \cdots\cdots&=\dot{x}_0(T_0)+\mu\dot{x}_1(T_0)+\beta\dot{x}_2(T_0)+\cdots\cdots+\tau\ddot{x}_0(T_0)+\\ &\quad+\tau\mu\ddot{x}_1(T_0)+\tau\beta\ddot{x}_2(T_0)+\cdots\cdots=\mu\dot{x}_1(T_0)+\\ &\quad+\tau\ddot{x}_0(T_0)+\cdots\cdots \qquad (47.34)\end{aligned}$$

当一次項满足条件(47.34)时，我們得到：

$$\tau=-\mu\frac{\dot{x}_1(T_0)}{\ddot{x}_0(T_0)}, \qquad (47.35)$$

根据(47.28)：

$$\tau=\frac{\mu}{A\omega^2}\dot{x}_1(T_0). \qquad (47.36)$$

我們指出：在一般的情况下，即当(47.20)类型的方程式写为(47.10)的形式时，用来确定其零次近似的駐常振幅的公式，和(47.32)相类似，將具有下列形式：

$$\int_0^{T_0} f(A\cos\omega\xi, -\omega A\sin\omega\xi)\sin\omega\xi d\xi=0. \qquad (47.37)$$

假如对一般形式下的具有小参数的非綫性方程式(47.21)进行全部的推理的話，便不难看出这一点。公式(47.37)代表以 $x=A\cos\omega t$ 代入函数 $f(x,\dot{x})$ 后幷展开为三角級数中的 $\sin\omega t$ 的振幅。

确定駐常振幅的方程式(47.37)可以由簡單得多的下列方法得到。当 μ 足够小时，对于(47.10)形式的振蕩器方程式，其任何解总可以写为：

$$x(t)=x_0(t)+\mu x_1(t)+\mu^2x_2(t)+\cdots\cdots \qquad (47.38)$$

將表达式(47.38)代入(47.20)，并令其具有同次 μ 的那些項等于零，我們便得到了逐步确定函数 x_0, x_1, x_2, ……的下列方程式組:

$$\begin{aligned}&\ddot{x}_0+\omega^2x_0=0,\\&\ddot{x}_1+\omega^2x_1=(\bar{\alpha}-\bar{\gamma}\dot{x}_0^2)\dot{x}_0,\\&\ddot{x}_2+\omega^2x_2=(\bar{\alpha}-3\bar{\gamma}\dot{x}_0^2)\dot{x}_1,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\tag{47.39}$$

零次近似的方程式［即(47.39)中的第一个方程式］的解为諧振动

$$x_0=A\cos(\omega t+\varphi).\tag{47.40}$$

函数 $x_1(t)$ 具有这样的方程式:

$$\ddot{x}_1+\omega^2x_1=-[\bar{\alpha}-\bar{\gamma}\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)]A\omega\sin(\omega t+\varphi).\tag{47.41}$$

和在無阻尼的受迫振动的情形一样，方程式(47.41)是具有右边部分的方程式，这时，在右边部分將有具有頻率 ω 的項。因此，在解中將有包含时間 t 因子的項——共振項。这就是說，$x_1(t)$將随时間作無限制的增加。所以，一般說来，在任意瞬間 t，零次近似 x_0(諧振动)与解 x 的差別可以随便多大。

如果假定当 μ 微小时，方程式(47.20)的周期性解总保持接近于具有振幅 A_0 的(47.40)型的某个諧振动，也就是，当 μ 微小时，在任何瞬間 t，周期性的解都接近于 $A_0\cos(\omega t+\varphi)$，那末，在(47.41)的右边部分便应該沒有具頻率 ω 的項——共振項。这时，当 $t\to\infty$ 时，解 $x_1(t)$將是有限的，因而，当 μ 微小时，所求的周期性的解 $x_1(t)$ 將接近于 $x_0=A_0\cos(\omega t+\varphi)$。

为了确定 A_0，必須令(47.41)中具有 ω 項的振幅为零，或者如人們常說的，“消灭在(47.41)中的共振項”。作我們前面曾經作过的演算时，便得到已知的表达式(47.33)。

然而应該指出，用这一簡單的方法，这就是全部我們所可能得到的。当仅仅需要周期性解的零次近似的振幅值时，可以这样做。但，当 μ 的值微小时，若要計算具有任何准确度的周期性的解，而且还要确定具有任何准确度的这一解的周期，則必須采用比較严格的方法，例如，采用在这一节里所講过的 A. A. 安德罗諾夫方法。

4. 周期性解的稳定性

当用这种或那种方法找出振蕩器方程式的解时，还不能断言振蕩器將作与这一解相对应的振动。关于所得到的这一周期性解，

还必須解决它的稳定性的問題。

假定系統作一定的周期振动，而在某一瞬間，外来的扰动——这在現实系統中是总会發生的——使系統离开了周期性的狀态。那末，以后將怎样呢？

假如經过一些时間以后，系統恢复到原来的周期性狀态，那末，这种狀态是稳定的，它將繼續下去；假如不如此，那末，周期性狀态是不稳定的，而且事实上，在系統中也看不出它作任何一段时間的延續。

令振蕩器的方程式

$$\ddot{x}+\omega^2x=\mu f(x,\dot{x}) \tag{47.42}$$

具有周期性解 $x_n(t)$，現在必須确定这解的稳定性。在某一瞬間，这解具有下列形式:

$$x_n(t)+z(t), \tag{47.43}$$

其中 $z(t)$ 是扰动的結果。假定 z 与 x_n 比較起来显得很小，于是將(47.43)代入(47.42)时，我們得到:

$$\ddot{x}_n+\ddot{z}+\omega^2x_n+\omega^2z=\mu f(x_n+z,\dot{x}_n+\dot{z})=$$

$$=\mu f(x_n,\dot{x}_n)+\mu z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_n,\dot{x}_n}+\mu\dot{z}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{x_n,\dot{x}_n}+\cdots\cdots,$$

將高次項忽略时，我們由上面得到具有周期性系数的 z 的方程式:

$$\ddot{z}+\omega^2z=\mu\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_n,\dot{x}_n}\cdot z+\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{x_n,\dot{x}_n}\cdot\dot{z}\right]. \tag{47.44}$$

令 z_1 和 z_2 是方程式(47.44)解的基本組。因为基本方程式(47.42)不明显的依存于 t，故可以断言基本解中有一个是純周期性的。实际上，在这种情况下，方程式(47.42)的解必須包含着一个与时間 t 相加的常数，这也就是：假如 $x_n(t)$ 是解，那末 $x_n(t+C)$ 也是解，其中 C 为任意常数。

因此可以設想这样一个扰动，它仅仅使常数 C 作大小为 ΔC 的

改变，被扰动了的周期性的解具有这种形式：$x_n(t, C+\Delta C)$。在这种情况下，扰动的結果可以看作是（47.44）的一个基本解，并可写为：

$$z_1 = x_n(t, C+\Delta C) - x_n(t, C)。$$

因为具有同样周期的兩个周期函数的差还是周期函数，所以这一个解是純周期的。

假如將方程式(47.44)写成这样的形式：

$$\ddot{z} + p(t)\dot{z} + q(t)z + \omega^2 z = 0, \qquad (47.45)$$

其中，显然，$p = -\mu\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{x_n, \dot{x}_n}$，$q = -\mu\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_n, \dot{x}_n}$，那末根据利烏維勒定理，

$$\dot{z}_1 z_2 - z_1 \dot{z}_2 = Be^{-\int p\,dt}, \qquad (47.46)$$

其中B为常数。在这种情形下，当

$$\int p\,dt > 0 \qquad (47.47)$$

并随时間增加时，那末根据(47.46)，当 $t \to \infty$ 时

$$\dot{z}_1 z_2 - z_1 \dot{z}_2 = 0.$$

当积分上式时，我們得到：

$$\ln z_1 = \ln z_2 + \ln C \quad 或者 \quad z_2 = Cz_1,$$

其中C为常数。因此，在这种情形下，z_2也会是有界的周期函数。这样一来，条件(47.47)便是稳定性的条件。

为了实际上应用的方便起見，最好將稳定性的条件(47.47)列成这样的形式。因为函数 $p(t) = -\mu\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{x_n, \dot{x}_n}$ 是周期函数，所以可將它展开为傅立叶級数，或者 $p(t) = -\mu\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{x_n, \dot{x}_n} = a_0 +$ 一些具有基頻整数倍頻率的正弦和余弦項的和，a_0 是函数 $-\mu\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{x_n, \dot{x}_n}$ 的三角級数展开式中的常数項。

如果 $$a_0>0,\tag{47.48}$$
那末就滿足条件(47.47)，解 $x_n(t)$ 便是稳定的；反之，当 $a_0<0$ 时，則解 $x_n(t)$ 会是不稳定的。

因此，为了确定解的稳定性，需要取基本非綫性方程式(47.42)的右边部分对 $\dot{x}$ 的导函数，并將所研究的周期性的解代入导函数，把它展开为三角級数，然后仅仅确定常数項的符号。如果常数項的符号为負号时，那末，解是稳定的。

在我們的情况下，对于振蕩器方程式(47.20)

$$\mu\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(\mu f)=\alpha-3\gamma\dot{x}^2.$$

將零次近似的周期性解 $x_0=A_0\cos\omega t$ 代入上式，便得到：

$$\mu\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{\dot{x}_0}=\alpha-\frac{3}{2}A_0^2\omega^2\gamma-\frac{3}{2}\gamma\omega^2A_0^2\cos 2\omega t,$$

如果按照(47.7) $A_0=\dfrac{2}{\omega}\sqrt{\dfrac{\alpha}{3\gamma}}$，則常数項为：

$$\alpha-\frac{3}{2}\omega^2\gamma\frac{4}{\omega^2}\frac{\alpha}{3\gamma}=-\alpha,$$

α 是正值，因此，其零次近似为 $x_0=A\cos\omega t$ 的解是稳定的。

由上述結果可以看出，自动振动的理論分析是相当复杂和繁瑣的。暂时我們还只限于工作点(圖 128)是位于特性曲綫的中点的情形；假如不是这样，則表示特性曲綫工作段的多項式(46.6)，其項数会增多，而演算將变得更要繁一些。因此，多半用"縮短的方程式"(47.17)的方法，这种方法能比較迅速和簡單地导出結果。

还有一些分析自动振动系統的方法，例如，前面提到过的克雷洛夫和波果柳波夫方法。可惜是因为它需要較多的篇幅，在这里我們不打算分析它了。但我們还指出一种分析自动振动系統的簡單方法，即 К. Ф. 杰阿多尔奇克的能量方法，这一方法固然不十分严格，但与上述的一些方法比較起来，它是一个比較簡單明了的

工具。

5. 杰阿多尔奇克的能量方法

分析自动振动的能量方法的基本概念，用实例来說明最为簡單。因此，讓我們研究如何用这一方法来解决有关振蕩器中自动振动的問題，这振蕩器是在陰極一柵極电路中具有迴路的(圖129)。振蕩器方程式(46.16)为，

$$\ddot{V}+\omega^2 V=(\alpha-\gamma V^2)\dot{V}, \tag{47.49}$$

其中 V 是迴路电容器上的电压。用 $\dot{V}$ 乘(47.49)，并記住 $\omega^2=\frac{1}{LC}$，則我們可將上式变換成：

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{LC^2\dot{V}^2}{2}+\frac{CV^2}{2}\right]=LC^2(\alpha-\gamma V^2)\dot{V}^2, \tag{47.50}$$

因为迴路的电流为 $I=C\dot{V}$，故上式中 $\frac{LC^2\dot{V}^2}{2}$ 一項代表电流的磁能。因此，(47.50) 的右边部分是迴路总电磁能的导函数，总电磁能为：

$$E=\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}CV^2.$$

如果在振蕩器迴路中有任何的过程 $V(t)$，那末，

$$W(t)=LC^2\int_0^t(\alpha-\gamma V^2)\dot{V}^2 dt \tag{47.51}$$

代表在时間 t 內，振动的电磁能的变化。假如这一过程是駐常的周期性过程，那末，(47.51)这一积分將等于零，或者：

$$\int_0^T(\alpha-\gamma V_0^2)\dot{V}_0^2 dt=0, \tag{47.52}$$

其中 T 是振动周期。可見，任何周期性的过程 $V_0(t)$ 应該滿足条件(47.52)，反过来，当寻求是否有周期性狀态的可能时，这一条件有

很大的用处。

然而由条件(47.52)不能确定振动的波形，即函数 $V_0(t)$ 的形式。但，在实驗和比較的基础上，可以假設振动具有頻率为 ω 的近似正弦形狀，于是根据条件(47.52)，不难求得駐常振动的振幅。用条件(47.51)也可以研究駐常振动的稳定性；假如当振动的振幅增加时，(47.51)的积分变为負的，而当振动的振幅减小时，它变为正的，那末，这个駐常振动就是稳定的。

在杰阿多尔奇克的方法中，必須給定振动的波形，而求解却很簡單。在下一节中，我們將就在陰極—柵極电路中有迴路的振蕩器的狀态加以分析，借以說明这一方法的应用。

§48. 特性曲綫的工作点的选擇对振蕩器中自动振动的影响

在振蕩器中的自动振动狀态和工作点在电子管特性曲綫上的位置之間的依存关系，可以很簡單地用能量方法建立起来。以前曾假設工作点——与电子管沒有振动狀态时相对应的点——位于特性曲綫的中点(圖 128)。在綫路中(圖 129)当將电容器的电路断开时，流过电子管的电流为 i_{a0}，而控制电压为：

$$V_{y0}=E_c+DE_a.$$

i_{a0} 和 V_{y0} 所代表的点(圖 128)是特性曲綫的中点，是有最大互导 S_0 的地方。根据公式(46.6)，任一点的互导將是

$$S=\frac{di_a}{d(\Delta V)}=S_0\left[1-\frac{(\Delta V)^2}{K^2}\right]. \qquad (48.1)$$

因此，互导沿工作点的兩边对称地减小，这在圖 128 上也可以看出。

在这种情况下产生的自动振动狀态，称为軟自动振动狀态。为了产生这种狀态，只需要微小的起始冲击。正如由(47.6)可以

看出的，在理論上它可以随便多小。而当綫路的参数均匀地变化时，駐常振动的振幅的值也均匀地变化。

其实，根据公式(47.8)和(46.17)，当駐常振动时，电容器上电压的振幅为

$$A_0 = 2K\sqrt{1-\frac{RC}{MS}}. \qquad (48.2)$$

同样地，根据(47.7)和(46.12)，在板極电路具有迴路的振蕩器中(圖 133)，其电流振动的振幅为:

$$A_0 = \frac{2K}{\omega(M-LD)}\sqrt{\frac{MS-RC-LSD}{(M-LD)S}}. \qquad (48.3)$$

假如將比 M 小得多的項 LD 忽略掉，則公式(48.3)可以化簡。因此，在振蕩器中电流振动的振幅为:

$$A_0 \approx \frac{2K}{\omega M}\sqrt{1-\frac{RC}{MS}}. \qquad (48.4)$$

由駐常自动振动的振幅的公式(48.2)和(48.4)可以看出，随着 R 的均匀增加，振动振幅將均匀地减小；而随着 R 的减小，振幅將增加起来等等。

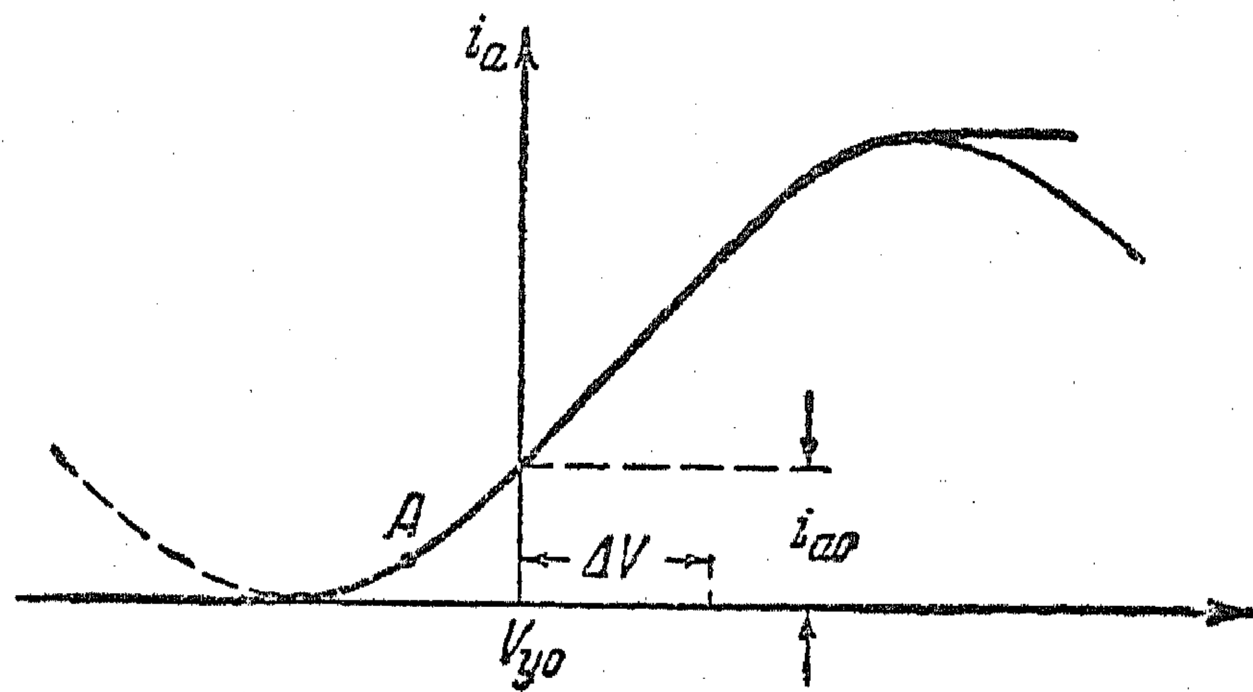


圖 133.

如果由适当选擇 E_c 和 E_a 的值而决定的工作点，不在特性曲綫的中点，那末，就不能用三次多項式来代表特性曲綫了。例如如圖 133 所示的，假使工作点稍稍向下移一些，那末，至少还必須加入一个二次項，而特性曲綫的表达式將具有下列形式:

$$i_a = i_{a0} + S\Delta V + \beta_1(\Delta V)^2 - \beta_2(\Delta V^3). \qquad (48.5)$$

特性曲綫可以看成是由三根綫組成的：直綫 ($S \cdot \Delta V$)，抛物綫

$\beta_1(\Delta V)^2$，和立方拋物綫 $\beta_2(\Delta V)^3$(圖 134)。因此，当适当的选擇

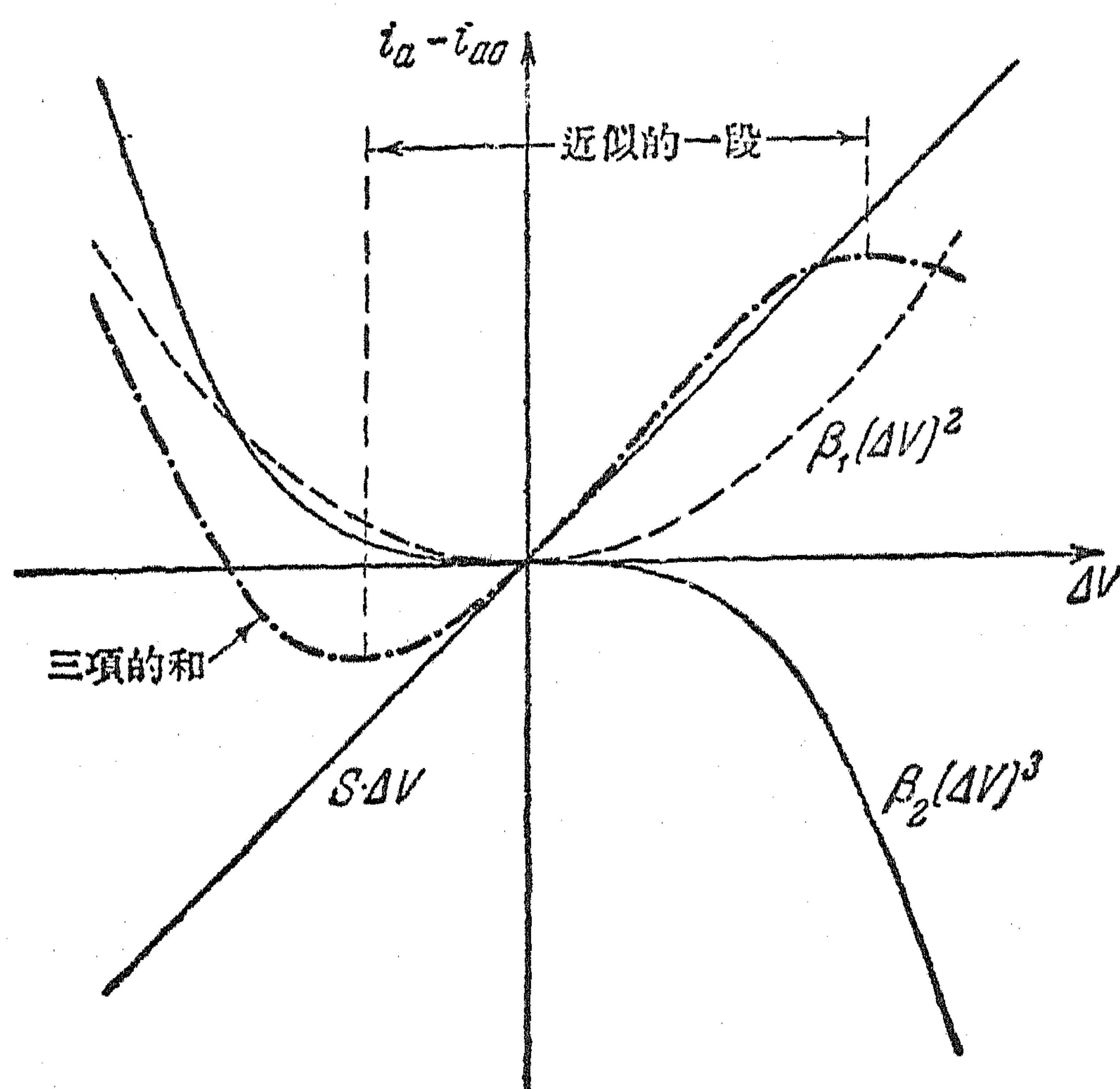


圖 134.

系数时，理論曲綫(48.5)仅仅在某一段上接近于实际的特性曲綫(圖 133)。

假如工作点还要移下一些，例如在点 A 以及更下的地方(圖 133)，那末，为了比較准确的用多項式来表示它，至少必須在多項式中还取四次和五次的項：$\beta_3(\Delta V)^4$ 和 $\beta_4(\Delta V)^5$。在这种情况下，演算就复杂起来了。但，如我們以后可以确信的，为了确定零次近似的振幅，特性曲綫的偶次項(具有 β_1 和 β_3 的項)沒有任何的意义：零次近似的自动振动的振幅，不依存于它們。这从研究公式(47.37)中可以看出。

其实，公式(47.37)說明了，如果將 $f(x_0, \dot{x}_0)$——方程式(47.10)的右边部分——中的 x_0 代以 $A\cos\omega t$，并將它展开为三角級数，則 $\sin\omega t$ 的振幅將等于零。在方程式(47.10)右边部分所新加进去的特性曲綫的偶次項，决定着常数部分和具有頻率 2ω, 4ω 的項，因

此它不包含在由(47.37)中得到的、用来确定振幅的公式中。

只消用能量方法就能看出，何以特性曲綫的偶次項不会影响振幅。將栅極电路中具有迴路的振蕩器方程式(46.16)写成下列形式:

$$\ddot{V}+\omega^2V=-\frac{R}{L}\dot{V}+\frac{M}{LC}\frac{di_a}{dt},\qquad(48.6)$$

其中 V 是迴路电容器上的电压，R 是电阻，L 是迴路的电感量。

假如用 $S=\frac{di_a}{dV}$ 代表互导，則因为:

$$\frac{di_a}{dt}=\frac{di_a}{dV}\cdot\frac{dV}{dt}=S\dot{V},$$

方程式(48.6)可以改写为:

$$\ddot{V}+\omega^2V=\omega^2M\left(S-\frac{RC}{M}\right)\dot{V}.$$

那末相应于公式(47.52)的、关于振幅的能量条件可以表为:

$$W_1=\int_0^T\left(S-\frac{RC}{M}\right)\dot{V}_0^2dt=0,\qquad(48.7)$$

其中 V_0 是在駐常过程中电容器上的振动。

如果板流特性曲綫在一般情形下可以写为:

$$i_a=i_{a0}+S_0V+\beta_1V^2+\beta_2V^3+\beta_3V^4+\beta_4V^5,$$

那末互导便可以写为:

$$S=S_0+2\beta_1V+3\beta_2V^2+4\beta_3V^3+5\beta_4V^4.\qquad(48.8)$$

將(48.8)代入公式(48.7)后，我們看到，假如近似地令 $V_0=A\cos\omega t$，則具有 β_1,β_3 的各項总將等于零。在物理上它的意思是: 当 A 为任何值时，在一个周期內，依靠特性曲綫的偶次項輸送于迴路中的能量等于零。

假如用下列圖解法来作出(48.7)这一积分的話，則可以十分

清楚地証实这一結論。令 $V_0=A\cos\omega t$；那末

$$\dot{V}_0=\omega\sqrt{A^2-V_0^2}. \tag{48.9}$$

將(48.9)代入(48.7)，同时考虑到 $\dot{V}_0 dt=dV_0$，我們得到：

$$W_1=\omega\oint\left(S-\frac{RC}{M}\right)\sqrt{A^2-V_0^2}\,dV_0. \tag{48.10}$$

(48.10)这一积分应該作为綫积分来表出。它的値可以用圖解法决定。圖 135, a 所表出的是电子管的特性曲綫，而圖 135, $б$ 是这一特性曲綫的互导 S 的曲綫，至于圖 135, $в$ 則是 $S-\dfrac{RC}{M}$ 的曲綫和对应于余因子 $\sqrt{A^2-V_0^2}$ 的橢圓，所有这些曲綫沿 V_0 軸都系按照同一标尺繪出。我們这样取 (48.10) 这一积分：沿 V_0 軸由 $-A$ 到 $+A$，用橢圓上半部的値乘曲綫 $S-\dfrac{RC}{M}$ 的値；之后由 $+A$ 到 $-A$，用橢圓下半部的値乘曲綫的値。

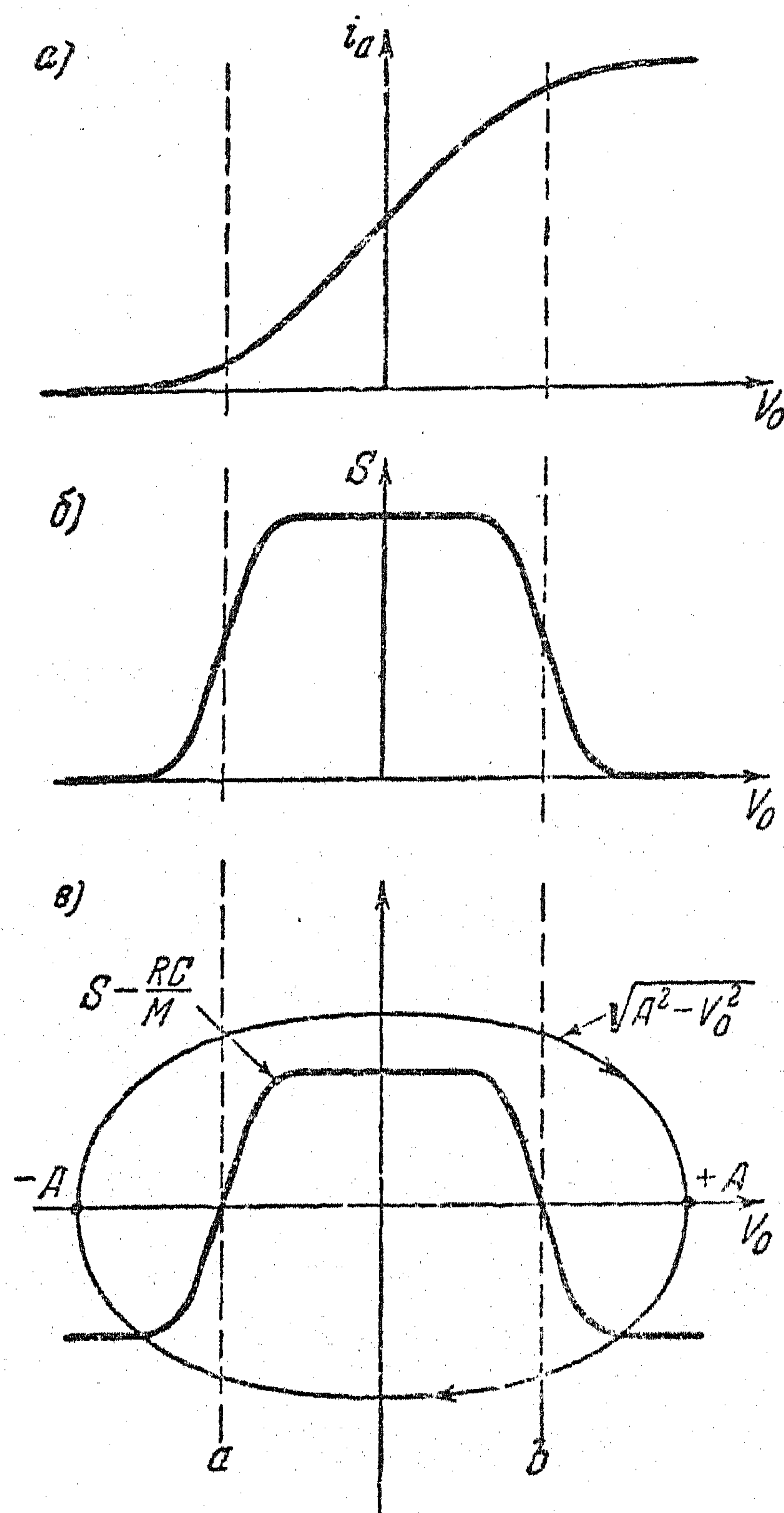


圖 135.

显然，在直綫 a 和 b (圖 135, $в$) 之間，与每一 V_0 的値相对应的 (48.10) 的积分素 (элементы интеграла) 將是正値；相反的，与这一段之外的 V_0 相对应的 (48.10) 积分素將

为負値。因此，必須变化 A 的値直到积分 (48.10) 的正的部分与負的部分相等为止。这时 $W_1=0$，这种 A 的値將是近似于正弦波的駐常狀态的振幅。这一方法的优点在于它可以应用于任何形式的 i_a 的特性曲綫。例如，在积分(48.10)中，具有和特性曲綫偶次項相对应的、互导 S 的不对称部分，不难看出，由这一部分所給出的値恒等于零。实际上，当 S 的特性曲綫不对称时，零点左边和零点右边的同样的积分素(圖 136)將提供数値相同而符号相反的結果。因此，可將互导的曲綫分为两个部分：对称的 S_c 和不对称的 $S_н$，并將不对称的部分撇开。

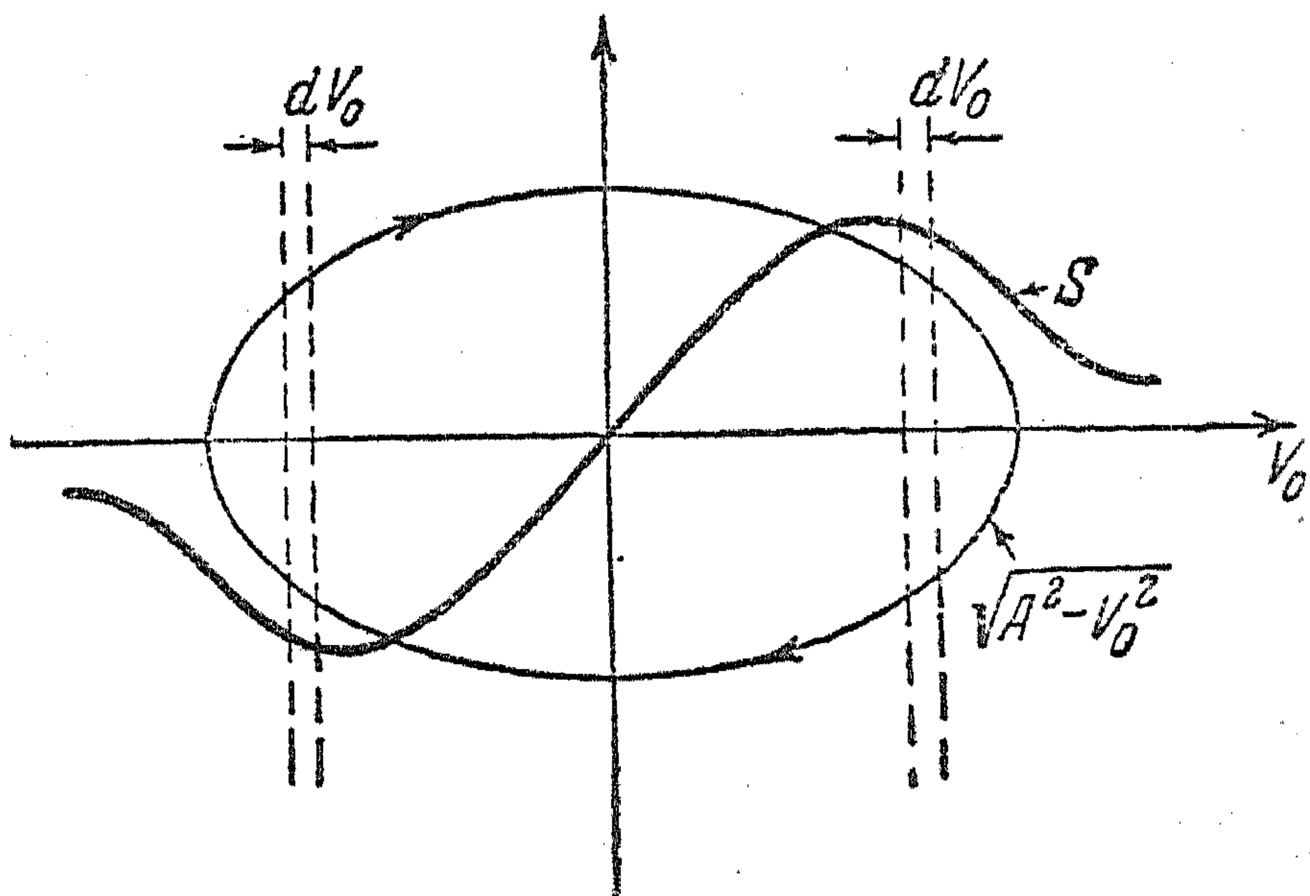


圖 136.

根据定义　$$S_c=\frac{S(V_0)+S(-V_0)}{2},$$

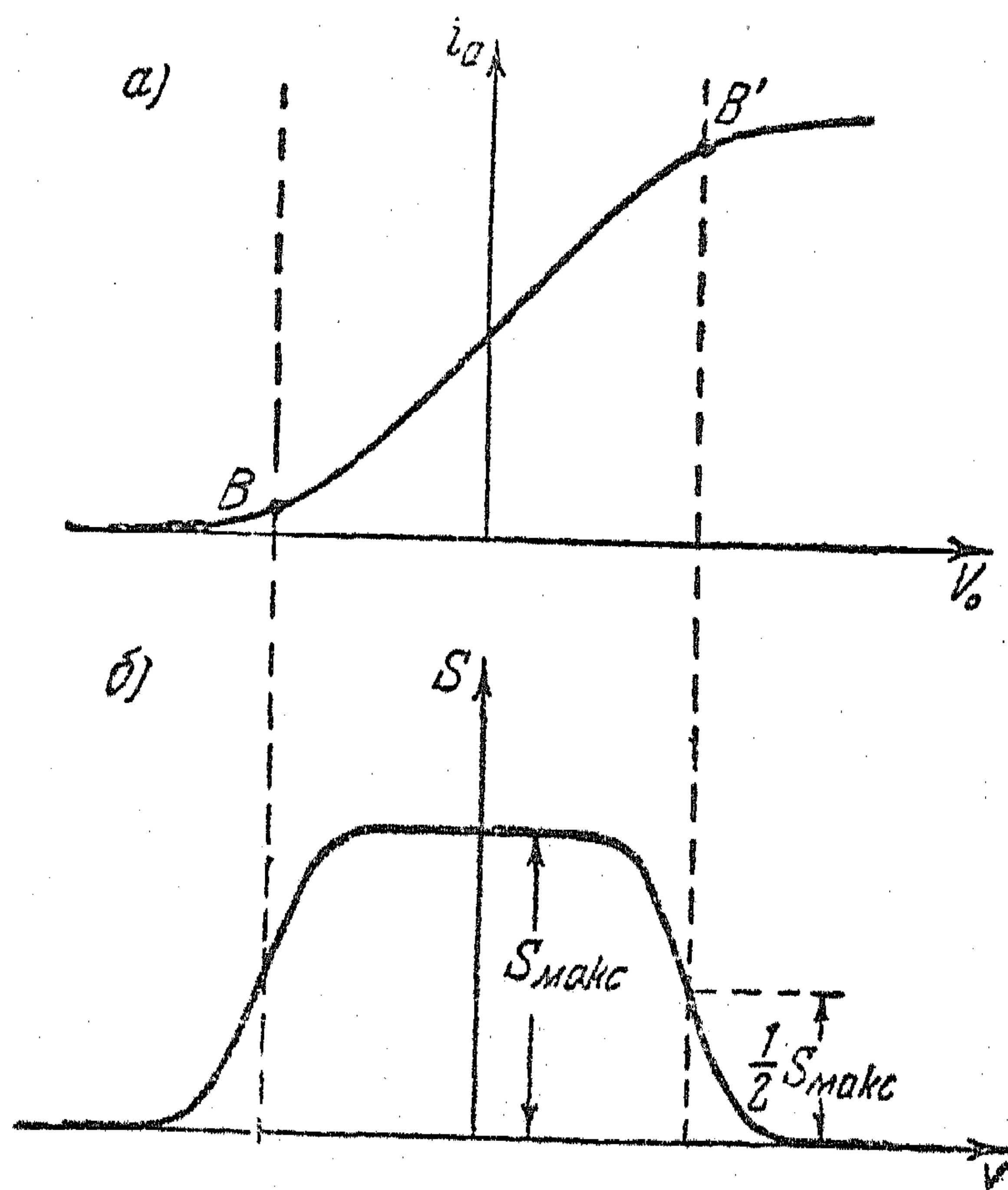


圖 137.

$$S_{\text{н}}=\frac{S(V_0)-S(-V_0)}{2}.$$

由这里可以看出，假如在特性曲綫上所选擇的工作点高于 B 点或低于 B' 点(圖 137)时，那末，互导的对称部分，在工作点 ($V_0=0$) 將具有最大值；而在点 B 和点 B'，則对应于 $\frac{1}{2}S_{\text{макс}}$ 的值。假如工作点位于 BB' 这一段范圍之外，那末，在工作点上，互导的对称部分具有最小值。

工作点在 BB' 范圍以內和以外时，其互导的对称部分和不对称部分如圖 138, a 和圖 138, $б$ 所示。工作点位于 BB' 范圍以外的

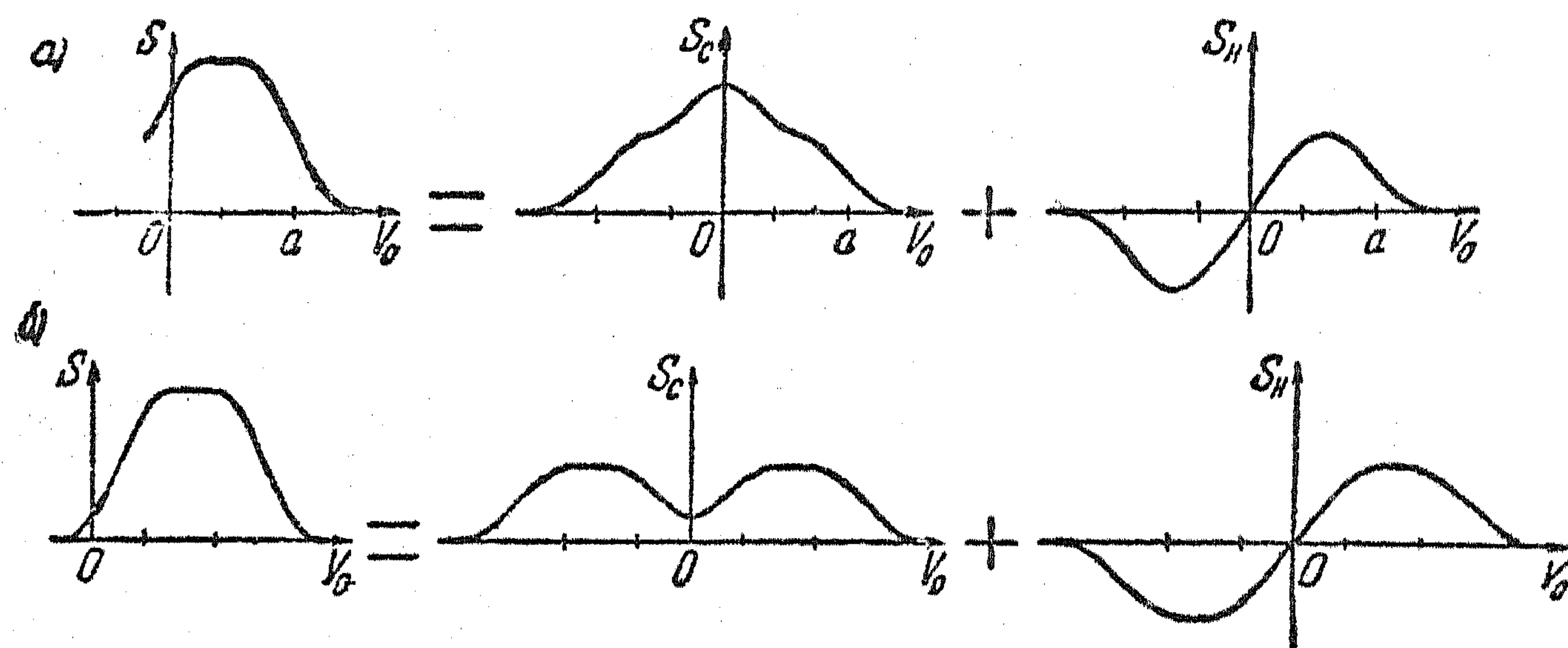


圖 138.

情形，相当于硬自动振动狀态。在这种情形下，能量积分(48.10)的圖解演算，应该借助于在圖 139 上所示的曲綫来进行。

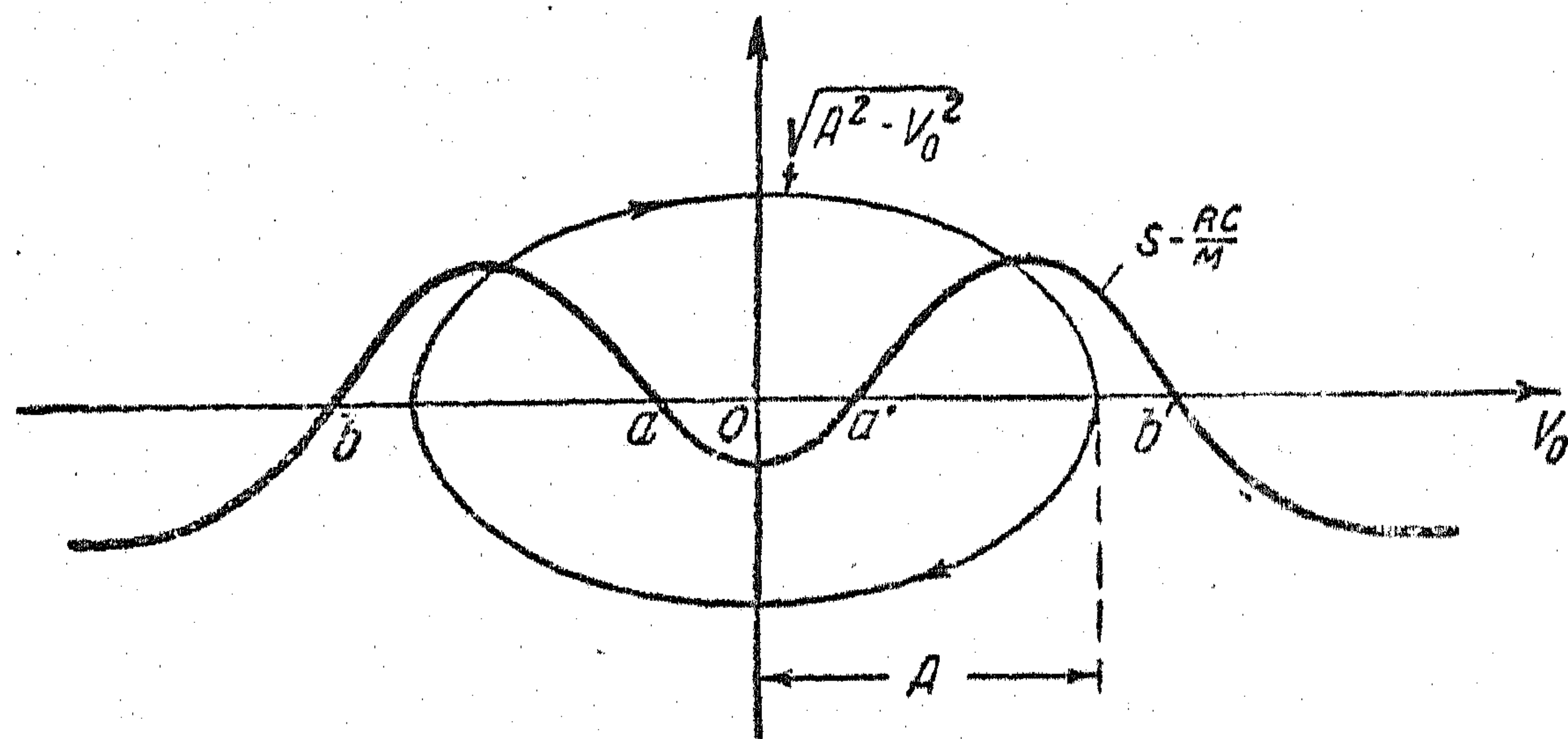


圖 139.

由圖 139 中可以看出，假如电容器上电压振动的振幅 A，是位于 Oa' 这一段間隔之內，那末能量积分將是負的。它的意思是，具有这样振幅的振动应該是阻尼的。假如 A 位于 $a'b'$ 这一段間隔之內，那末积分可能等于零也可能是正値。具有振幅 A 且位于这段間隔內的駐常狀态將是不稳定的：把 A 减少一点就將使能量积分变为負値，于是，振动將是阻尼的；增加 A 將使能量积分变为正値，从而引起振动振幅的增加。很显然，在某个 $A>Ob'$ 的値时，將有第二个駐常狀态，而这个駐常狀态將是稳定的。

轉向公式(48.8)，我們看到：

$$S_{\text{c}}=S_0+3\beta_2V^2+5\beta_4V^4,$$

$$S_{\text{н}}=2\beta_1V+4\beta_3V^3.$$

不应該考慮具有系数 β_1 和 β_3 的項，并且假如在工作点的互导大于 $\frac{1}{2}S_{\text{макс}}$ 时，那末丢掉具有系数 β_4 的項也不会使解的性質起重大的变化，說得更准确些，丢掉这一項不会引起重大的誤差。而假如工作点的互导小于其最大値的一半时，那末，便是硬狀态。这时要进行分析，在用来近似代表电子管特性曲綫工作段的多項式中，还必須考慮它的五次項。

要注意到系数 S_0, β_1, β_2, β_3……依存于工作点的选擇。也应該注意，仅仅在作近似的研究时，互导的奇次項对自动振动狀态才沒有影响，在这种近似中，我們一直認为自动振动是正弦的；更准确地說，在所取的近似中，只要振动对于零是对称的話，便总是如此的。

研究圖 139 可以确信，在硬狀态的情形下，在相平面上的积分曲綫圖，將具有大概如圖 140 上所示的那种形式。假如起始値位于不稳定的極限圈 a' 之內时，那么振动將衰减下去；假如給出的起始条件在稳定的極限圈之外，即給出充分的“起始冲击”，那末，描迹点將逐漸的走到稳定的極限圈 a 上，而在系統中將發生駐常

的周期性的自动振动狀态。

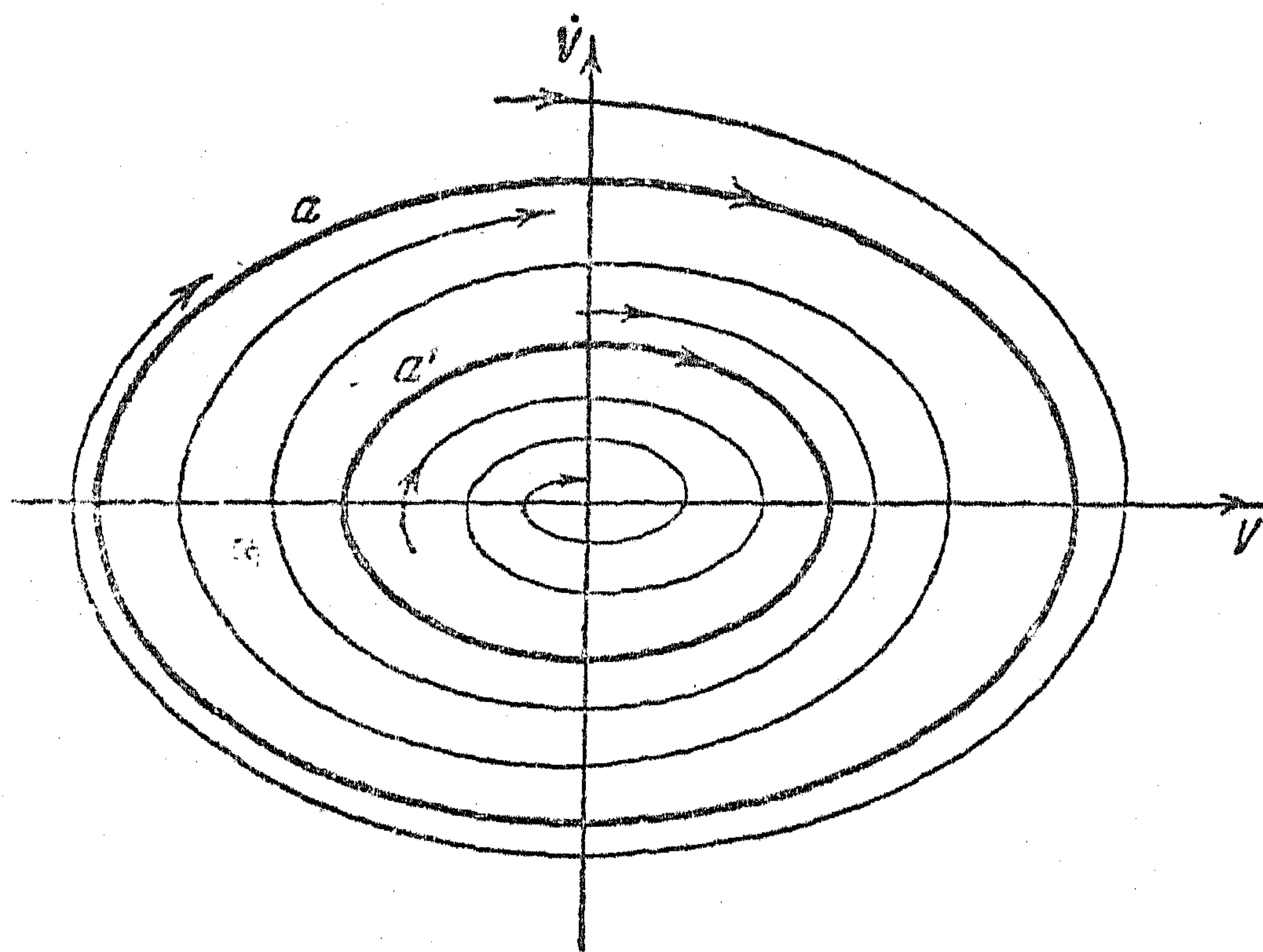


圖 140.

用前面討論过的方法：交变振幅的方法和小参数的方法，也不难得到在相平面上的圖形。

§49. 無綫电技术中的振蕩器狀态的分析（"准綫性方法"）

前文所講的自动振动过程的物理理論，对这种过程提供了一个十分正确的描述。可是在無綫电技术中，却常常利用所謂"准綫性方法"。这一方法的实質如下：解振动方面的問題，开头可跟解綫性方面的問題一样，然后再把該系統的非綫性質所需要的修正引进去。显然，当研究新的自动振动系統时，会發生新的还未研究好的問題，对于这些問題，这种方法不是常常可以給出正确答案的。

然而实驗無綫电振蕩器时，以及进行無綫电振蕩器的技术設計时，由于簡單和明了的原故，"准綫性方法"表現出很大的用处，因此，必須很好地掌握准綫性方法。

电子管的性質决定着电子管的平均互导，或者称之为振动的

互导，并用 $\bar{S}$ 来代表它。为了推理的簡單起見，我們引用四極管或五極管的平均互导，在这种类型的电子管中，实际上可以認为板流仅仅依存于栅压(D 十分小)。在这种情形下，若在电子管的栅極上加一具有振幅 V_0 的正弦的交流电压，那末，便产生具有同样頻率的板流振动，但是，一般說来，板流將不会是諧型的。將周期的板流振动分解为諧振动的級数并仅仅取其一次諧波。令基頻即栅压振动頻率的板流振动振幅等于 I_a。那末，根据定义，平均互导將是：

$$\bar{S}=\frac{I_a}{V_0}. \qquad (49.1)$$

平均互导的这一定义也可以推广到三極管，但在这里，V_0 代表控制电压的振幅。

显然，$\bar{S}$ 依存于振幅 V_0 的値，而且这种依存关系随着工作点位置的不同而不同。

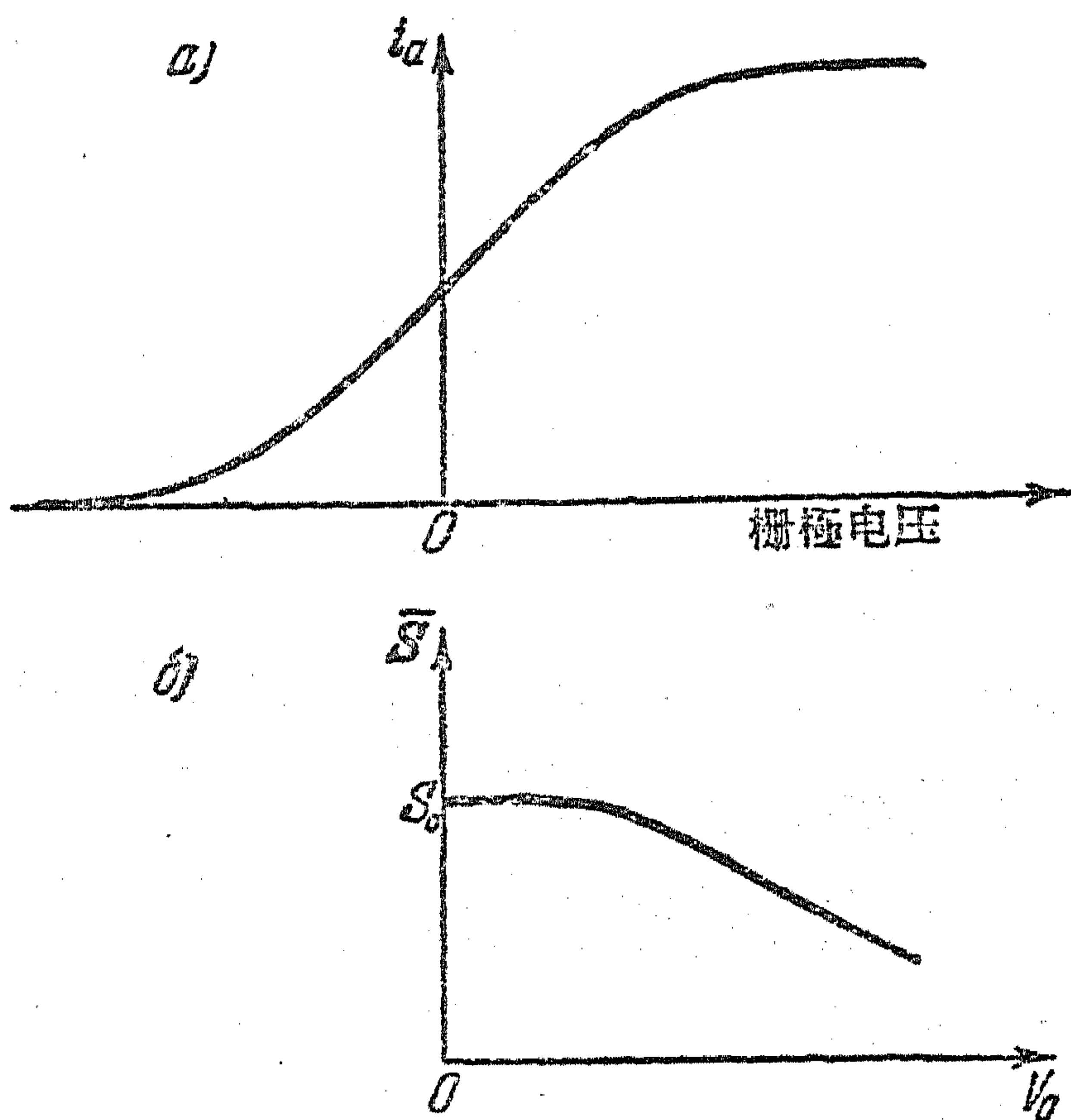


圖 141.

不难确信，假如工作点选擇在特性曲綫的中点(圖 141, a) 那末，平均互导与栅極上电压振幅的依存关系將如圖 141, б 所示。平均互导 $\bar{S}$ 随着振幅的增加而下降，当 $V_0=0$ 时，平均互导 $\bar{S}=S_0$，即是等于在工作点的板流的互导。假如工作点选擇在特性曲綫的較低的部分(圖 142, a) 那末平均互导將具有如圖 142, б 所示的形式。在这种情形下，平均互导將随着 V_0 的增加而增加，直到其最大値，然后又下降。

設振蕩器的板極电路中具有迴路，現在来研究其中的振动

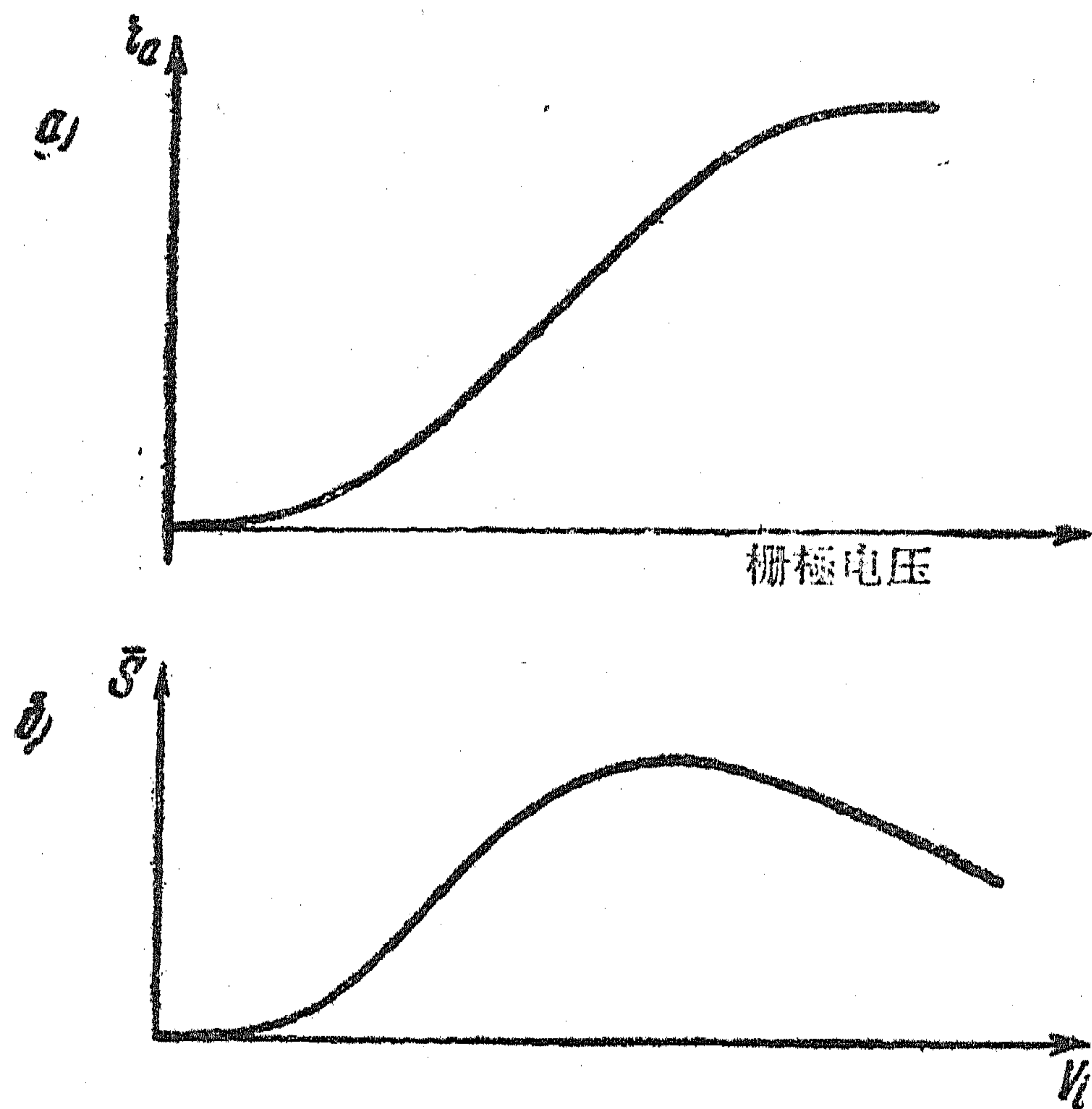


圖 142.

(圖 127)。再假設在迴路中發生着具有頻率 ω 的周期振动，而 ω 接近于迴路的固有頻率。那末，加上一个同一頻率的正弦电压于电子管的柵極时，則流过电子管的电流將是非正弦的。然而当品質因数的値足够大的时候，由于迴路的共振性質，頻率为 2ω, 3ω 等等的电流，对在迴路中的振动將几乎不显示任何的影响，在迴路中的振动，实际上仅仅由基頻 ω 的板流振动所决定。

令在迴路綫圈中的电流振动振幅为 I_{L0}(圖 127)，那末在柵極上的电压振幅为

$$\overline{V}_0 = i\omega M I_{L0}. \tag{49.2}$$

在迴路上的电压振幅为

$$\overline{V}_K = I_{L0}(R + i\omega L) \approx i\omega L I_{L0}. \tag{49.3}$$

因为当迴路的品質因数較大时，$\omega L \gg R$，显然，与 $i\omega L$ 比較起来，在这里，R 可以忽略。

另一方面，根据公式(17.10)，在迴路上的电压振幅 V_{K0} 和板流振幅，即流过迴路的电流振幅 I_a，將由下列关系式联系起来：

$$V_{K0} \approx \frac{L}{CR} I_a. \qquad (49.4)$$

將(49.2)代入(49.1)中，我們得到：

$$I_a = \omega M \bar{S} I_{L0}.$$

然后將这一电流振幅的値代入(49.4)，并与公式(49.3)相比較时，我們便得到下列的最后表达式，这表达式确定了平均互导和系統参数之間的依存关系：

$$\bar{S} = \frac{RC}{M}. \qquad (49.5)$$

因此，假如依存于振动振幅的平均互导滿足条件(49.5)时，振蕩器中便会發生具有頻率 ω 的周期振动。为了确定振蕩器的狀态，通常是作出平均互导的圖形(圖 143)，并找出平均互导曲綫与直綫 $\frac{RC}{M}$ 的交点，我們就用这种方法来确定在駐常狀态下的柵極上振动的振幅 V_{0c}，知道了 V_{0c} 并由公式(49.2)和(49.3)求得下式时，

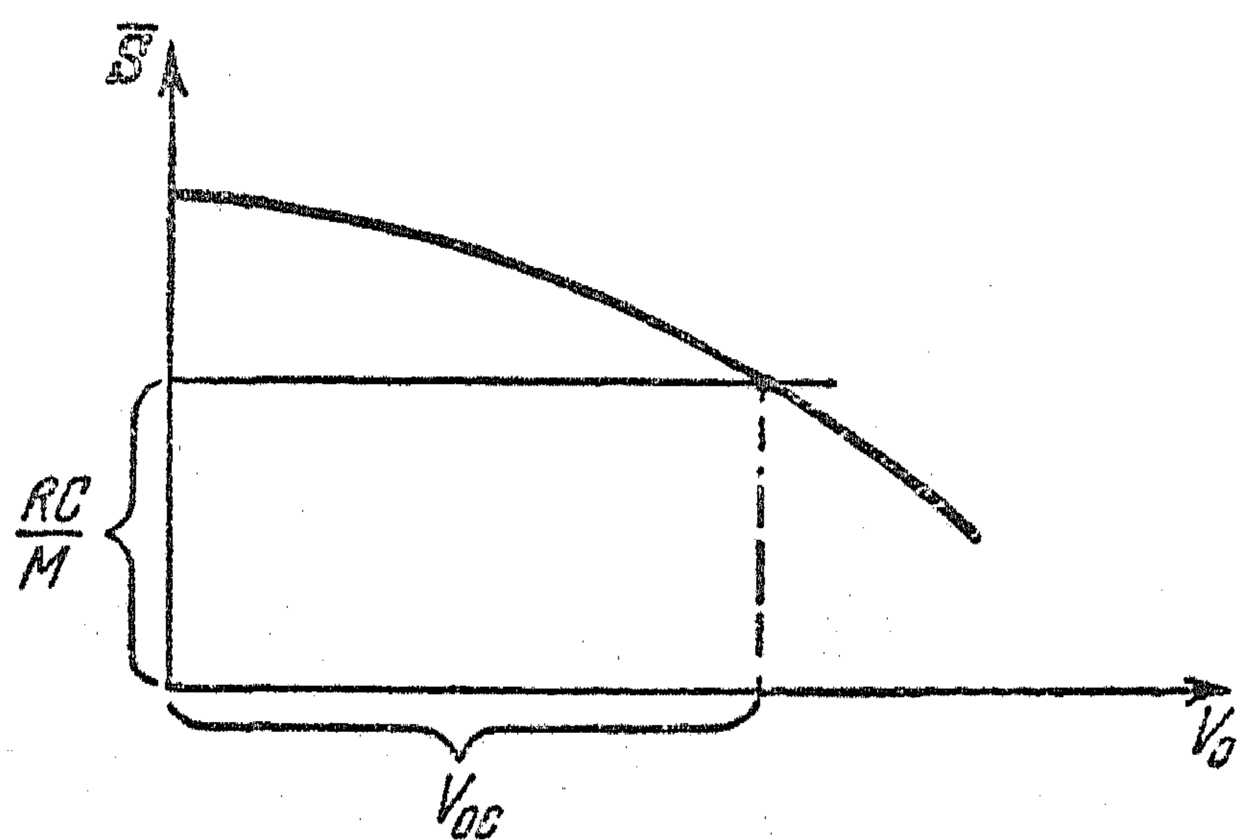


圖 143.

$$\frac{\bar{V}_K}{V_0} \approx \frac{L}{M},$$

便可确定在駐常狀态下在迴路上的电压振幅：

$$V_{KC} \approx \frac{L}{M} V_{0c}.$$

由圖 143 中可以看出，假如 $\frac{RC}{M} > \bar{S}_{\text{макс}}$，那末在振蕩器中不可能有振动。随着 R 的均匀减小，或者 M 的均匀增加，振动振幅將均匀

的增加，因而，在振蕩器中將是軟振动狀态。

駐常狀态的条件(49.5)，还可以这样来說明。假定在迴路中所發生的諧振动(說得更正确些，十分近似于諧振动)是这样的，以致在栅極上的振动振幅 V_0，小于駐常振动振幅 V_{0c}，那末，如圖 143 所示，这就表示，与这一个 V_0 相对应的电子管的平均互导大于 $\frac{RC}{M}$，或者

$$\bar{S}(V_0)>\frac{RC}{M}.$$

这一条件的意义是：由栅極上的振动所产生的板流振动的振幅是如此大，以致板流的振动將使在迴路中的振动增長。用同样的方法可以得出下列結論，就是在振动振幅 V_0 对应于下列情况时，

$$\bar{S}(V_0)<\frac{RC}{M}, \tag{49.6}$$

則在迴路中的振动將減小。这些推理証实了与条件(49.5)相对应的狀态將是稳定的。

駐常狀态的条件(49.5)，在这种情形下，具有与自激条件(46.15)同样簡單的形式，只是以前的互导 S 是不依存于振动振幅的一个常数，而現在的平均互导 $\bar{S}$ 是依存于在栅極上的振动振幅的一个变数。变化的平均互导已經把电子管特性曲綫的非綫性考慮在內了。

用类似的推理可以确定关于工作点不在中間位置的情况，这时，平均互导曲綫具有如圖 144 所示的形式，自动振动狀态將是硬狀态。在这个圖形上作一 $\frac{RC}{M}$ 直綫，假如 $\bar{S}_{\text{макс}}>\frac{RC}{M}$，我們便得到兩个可能的駐常狀态 V'_{0c} 和 V''_{0c}。不难看出：假如在迴路中的振动使 $V_0<V'_{0c}$，那末，因为和它們对应的平均互导小于 $\frac{RC}{M}$，振动应該衰減；假如 $V'_{0c}<V_0<V''_{0c}$，在这种情形下，因为平均互导大于 $\frac{RC}{M}$，那末，振动应該增長。因此，对应于振幅 V'_{0c} 的駐常狀态將

是不稳定的。同样的推理指出，对应于V''_{0c}的駐常狀态，將是稳定的。

在圖 144 上可以看出当参数变化时振动狀态的变化。例如，假如我們均匀地增加迴路电阻R，来使振蕩器由圖上所表明的狀态变为另一种狀态，那末，振动的振幅將均匀地下降，直到与平均互导的最大値相对应的某个V_{0c}的値为止；之后，当进一步增加R时，振蕩器中的振动將完全停止——突然停止。如果反过来減小R，当減到$R_0=\dfrac{M\bar{S}_{\text{макс}}}{C}$时，并不产生振动，而在这一情况下，振动却曾經消失过。当減小到某个$R_1<R_0$时，也就是相当于直綫$\dfrac{RC}{M}$差不多下降到B点时，振动才开始發生，并且是突然發生的。它具有与B'点相对应的振幅（圖 144），这一振动振幅比与R_0相对应的振动振幅要大些。

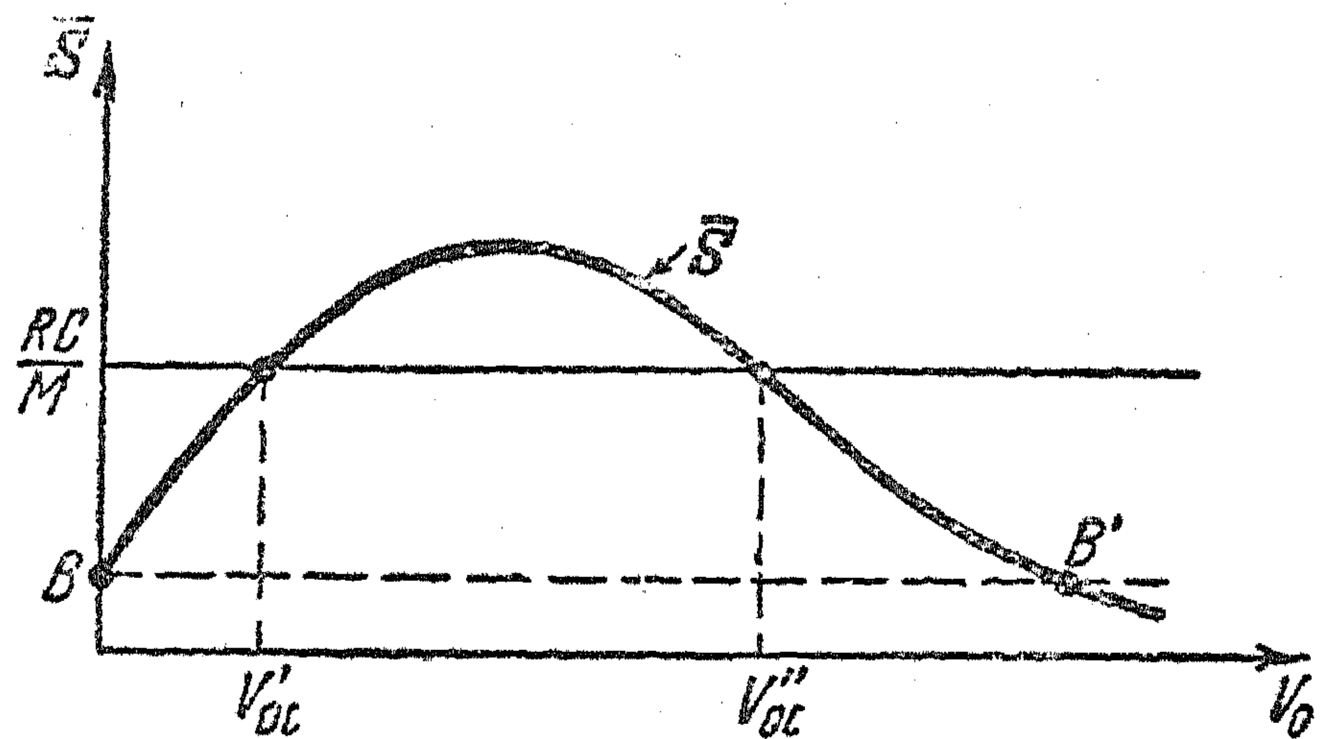


圖 144.

振动振幅与电阻R之間的依存关系，具有大概如圖 145 所繪的形式。当均匀地变化M时，也会看到同样的圖形。

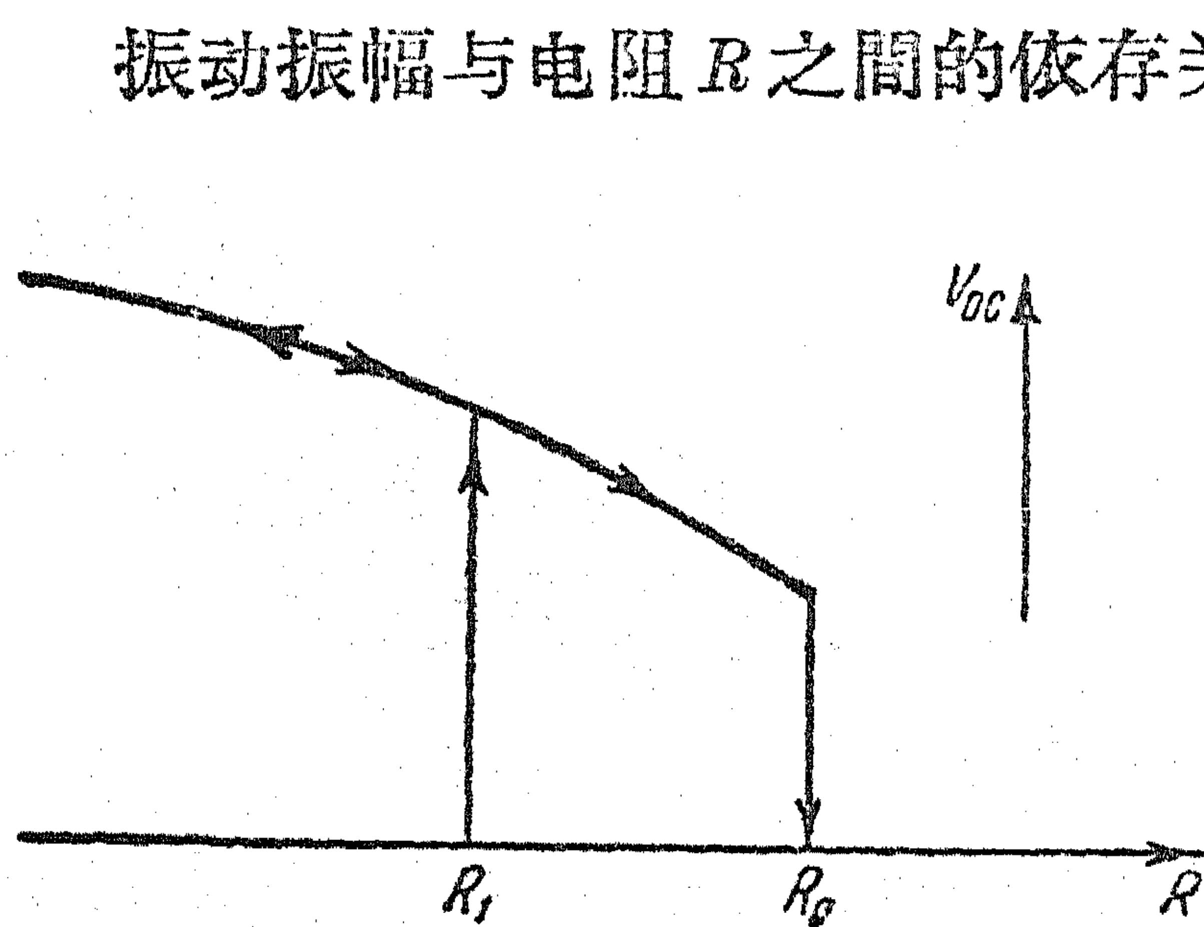


圖 145.

振动的突然产生，突然变为零，以及振幅和参数的"滯后的"依存关系是硬狀态的特征。

最后，我們要注意的是："准綫性方法"在某些

方面很接近于能量方法，它比前面講过的分析自动振动系統非綫性方程式的比較准确的方法，要簡單得多。实际上，这种方法其所以簡單，是由于假定振动是正弦的，是由于在一次近似中，將所有的諧波忽略不計等等。

然而应該指出，能否作上面这些假定，只有用严格的理論来証明，由这种理論得出結論时，便能在每种特别情形下，有把握地利用准綫性方法。許多新的現象是用严格的理論揭露和研究出来的。因此，当研究未曾探討过的振动系統时，就应該轉向于分析非綫性方程式的严格方法。当对于一定类型的自动振动系統作出了这样的分析以后，便可以甚至应該利用簡單的方法——准綫性方法和能量方法。

§50. 振蕩器的功率

假如振蕩器工作在軟狀态下，那末，当振动發生时，板流的直流分量大小不会变更。由电源每秒鐘所付出的能量，或者饋給振蕩器的电源的功率將等于：

$$E_a \cdot i_{a0}, \tag{50.1}$$

其中 E_a 是板極电池的电压，而 i_{a0} 是电流。因为电流 i_{a0} 的値等于当振蕩器振动时板流的直流分量，并且它不依存于振动的振幅，因此，这个饋給振蕩器的电源的功率，也不依存于振蕩器振动的是否存在。

当振蕩器中沒有振动时，那末由板电池所輸出的能量都消耗为导体中的發热和电子管板極的發热。在导体中的損耗一般比較小，因此，电源的功是消耗于板極的發热。

当振蕩器中有駐常振动时，电子管的板極上的电压將是交变的：

$$E_a - V_к \sin \omega t, \tag{50.2}$$

其中 V_K 是在振蕩器板極負載上的电压振幅。假定振蕩器中的振动是正弦的。流过电子管的电流將是交变的，我們用下式表示其电流的直流分量与一次諧波：

$$i_{a0}+I_0\sin(\omega t+\varphi), \tag{50.3}$$

I_0 是振幅，而 φ 是对于在板極負載上电压的相位差。

根据(50.2)和(50.3)，板極發热所消耗的功率將是：

$$W=\frac{1}{T}\int_0^T(E_a-V_K\sin\omega t)[i_{a0}+I_0\sin(\omega t+\varphi)]dt=$$

$$=E_a i_{a0}-\frac{1}{2}V_K I_0\cos\varphi.$$

將上式与(50.1)式比較时，我們看出振蕩器振动的功率將等于：

$$\frac{1}{2}V_K I_0\cos\varphi. \tag{50.4}$$

根据交流电的定律，可以立刻写出公式(50.4)。但必須强調的是，当振动时，电源的功是不变的，而板極發热所消耗的热量將要减少，减少的值等于振动所耗用的能量。

也应該指出，振动功率是正值，因此，根据(50.4)，

$$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}, \tag{50.5}$$

也就是板極电流与板極負載上电压二者之間的相位差，应該小于90°。否則，振动时板極所消耗的能量会大于板極电池的功。当 $\varphi=0$ 时，功率为最大，就

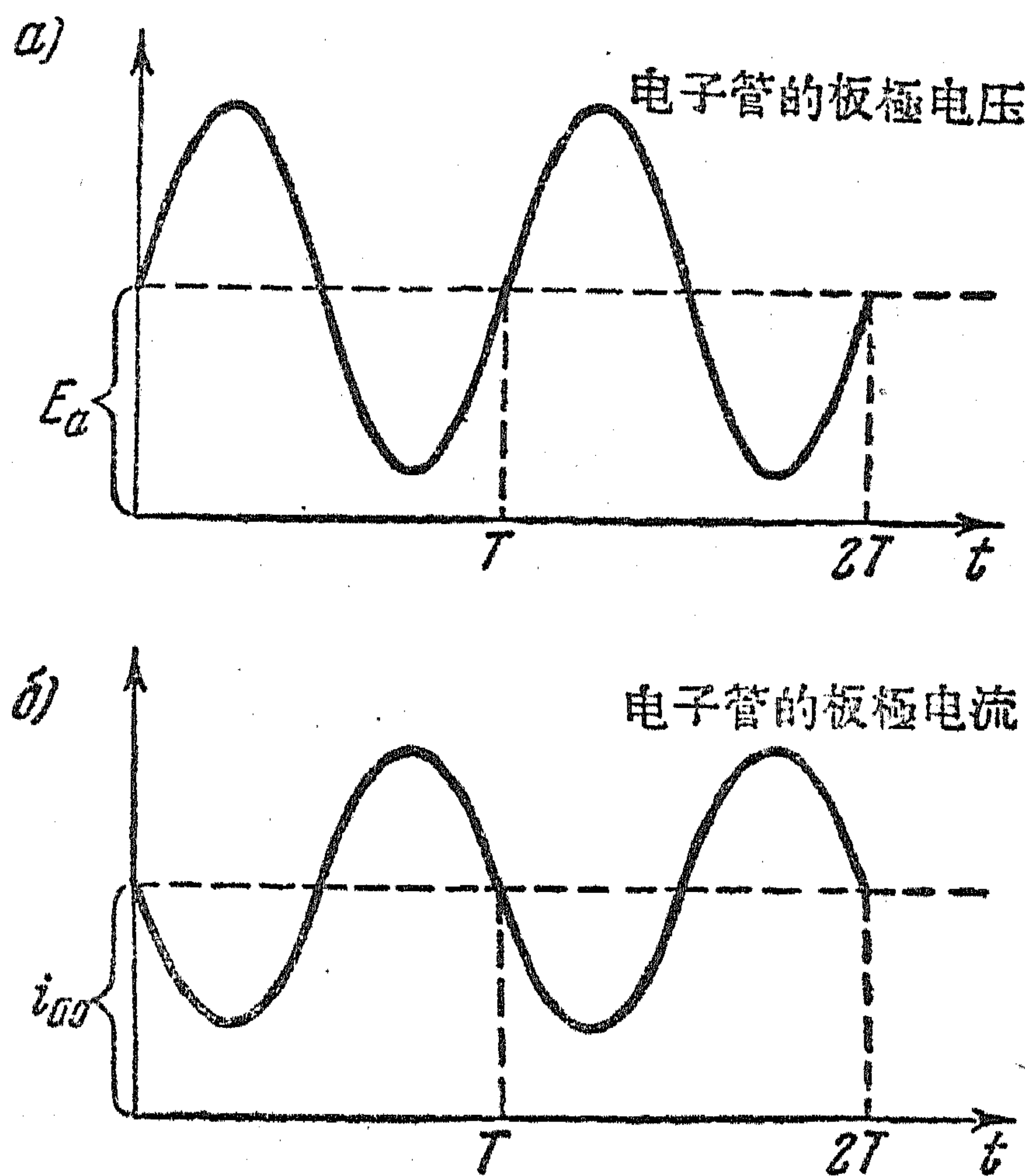


圖 146.

在这一振幅的値时，板極上的电压的振动(50.2)將与通过电子管的电流(50.3)反相位。当电压(圖 146, a)为最小値的那一瞬間，电流(圖 146, б)为最大値，因此，当振动时，尽管电压和电流的直流分量不变，电子管的板極發热也会減少。

由条件(50.5)可以推出一个簡單的相位定則，这定則对于确定振蕩器反饋的正确符号十分有用。这个定則便是：板極电流与板压应該反相位，或者接近于反相位。又因为流过电子管的电流总与在控制柵極上的电压同相位，所以，相位定則也可以写为：当振动时，在电子管柵極和板極上的电压应該是反相位，或者接近于这一关系。

其实，当迴路位于板極电路中时，那末，振动差不多以迴路的固有頻率进行。在这种情形下，迴路的电压降和流过迴路的电流同相位，而迴路的等效电阻为 $\frac{L}{RC}$。因此，假如在柵極上所加的电压与板極迴路上的电压同相位，那末产生無阻尼振动是可能的。这时应該記住，电子管板極上的电压与迴路上的电压反相位，这是因为板極上的与迴路上的交流电压的和等于零。

柵極电路中具有迴路的振蕩器(圖 129)也是这个样子。板極电路中反饋綫圈上的电压为：

$$M\frac{dI}{dt}+L'\frac{di_a}{dt}+Ri_a, \qquad (50.6)$$

其中 I 是迴路中的电流，R 是反饋綫圈的电阻，L' 是同一綫圈的电感量。因为迴路中的电流要比板流大得多，而 M 与 L' 的値大概一般大，故可將(50.6)中的第二和第三項忽略掉。而柵極电压等于：

$$L\frac{dI}{dt},$$

其中 L 是迴路的电感量。因此，仅仅当 $M>0$ 时，才能滿足相位定則。

§ 51. 振蕩器的綫路

下面举出几种常用的無綫电振蕩器的綫路。

1）圖 147 的“三点綫路”。由迴路綫圈引出三根导綫，分别接到电子管的板極、柵極与陰極，并使得板極电压和柵極电压反相位。

三点綫路也可能具有如圖 148 所示的另一种形式。

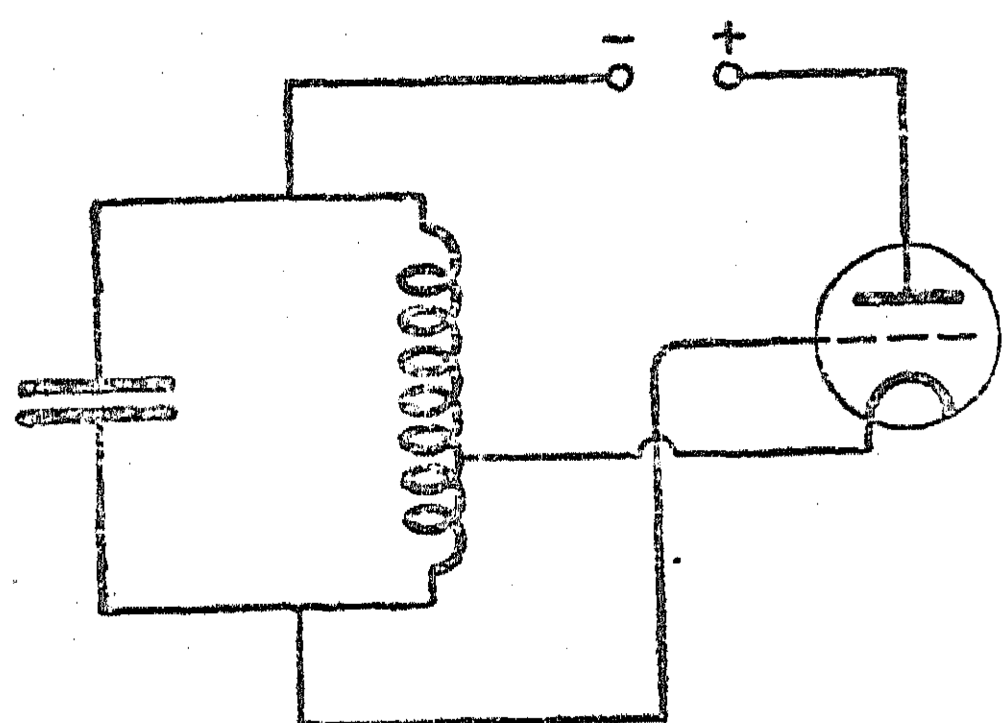


圖 147.

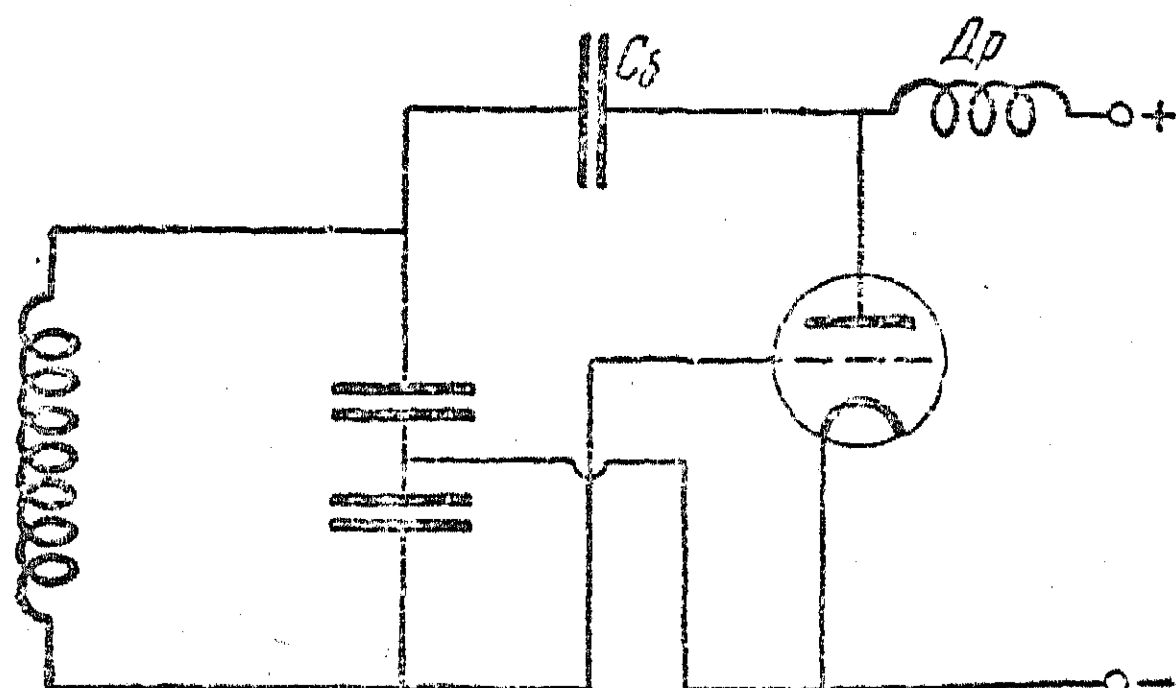


圖 148.

2）推挽式振蕩器具有像圖 149 那样連結的兩个电子管，振动迴路連接在电子管的板極迴路中，电源接于迴路綫圈的中点。当振动时，兩电子管的板極电压在互成反相位的情况下变化。因此，这一綫路也称为推挽式綫路。振动迴路也可以接在电子管的柵極电路中。

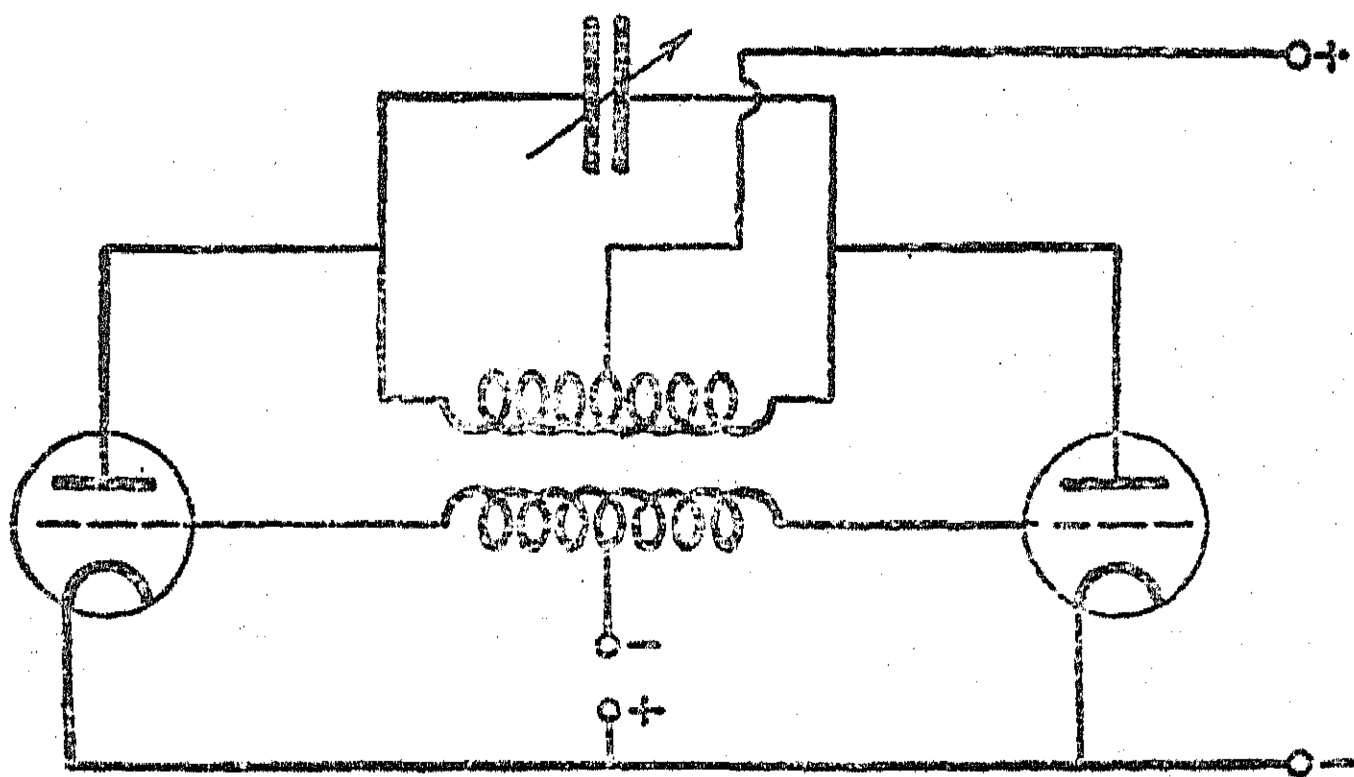


圖 149.

3）双迴路式振蕩器。有一些具有兩个迴路的振蕩器的綫路。这种振蕩器中的振动，应該当作是具有兩个自由度的系統中的振

动，但，就是这种情形下的振动也同样接近于諧振动，因此，可以用准綫性的近似方法来研究它，虽然，对其許多特点，只有用非綫性的理論，才能徹底闡明，关于这种类型振蕩器的一种常用的綫路如圖150所示。

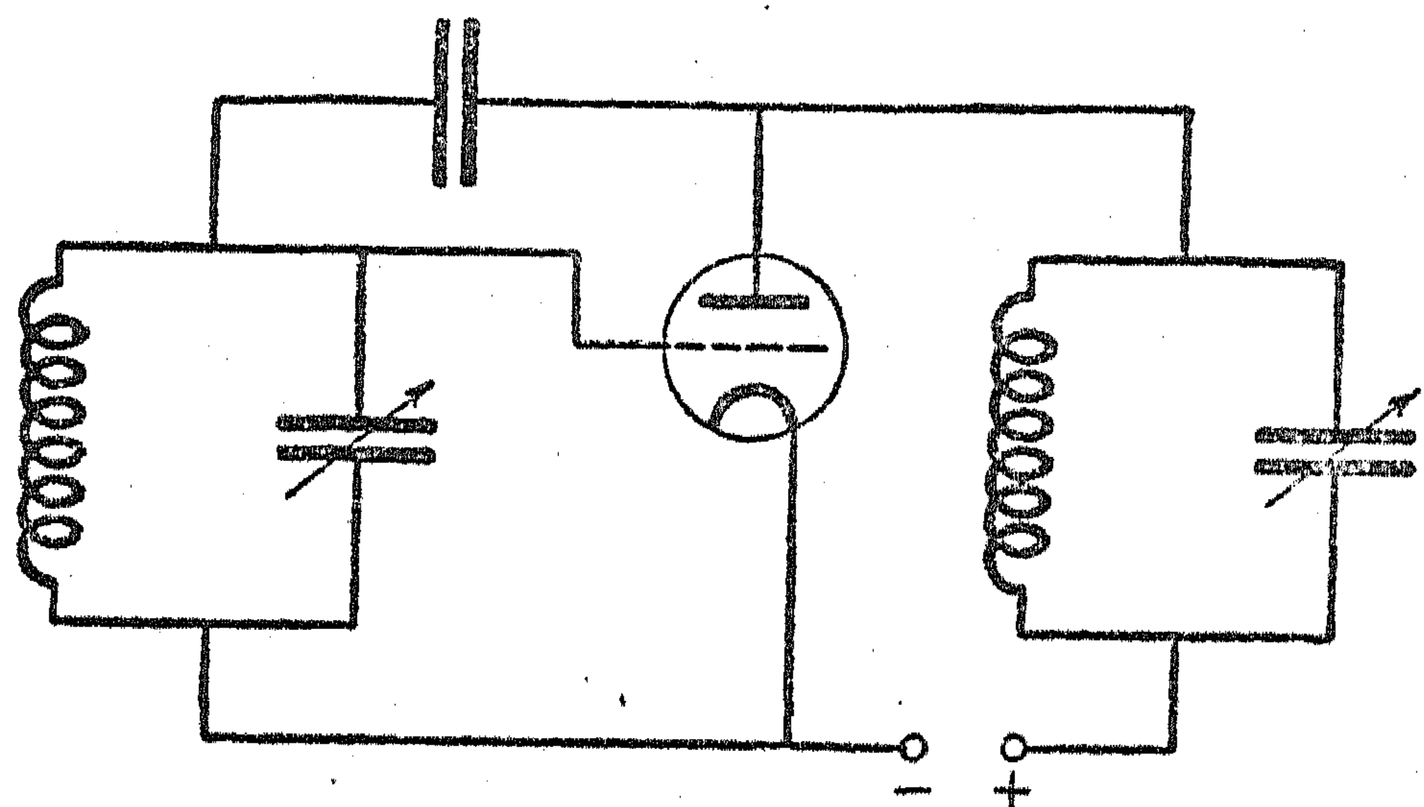


圖 150.

在上面所指出的綫路中，圖147, 149, 150都是电子管的串联饋电。这就是說，电源串接于电子管的板極电路中，全部板流都流过迴路。

实际上并联饋电的綫路要流行得多，这是因为它可以由一个电源饋电給許多独立的裝置。并联饋电的綫路表出在圖148和151上。在这里，直流分量和交流分量的电路是分开的。在板極电源电路中，連有高頻塞流綫圈以阻塞高頻振动經过电源的通路。綫路圖151中的塞流綫圈 $Др$ 是一个电感綫圈，这綫圈对高頻振动的阻抗，比迴路电路对高頻振动的阻抗要大得多。振动迴路經过一只隔离电容器 $C_б$ 并联于电子管电路上，以防止电源通过振动迴路中的綫圈而短路。隔离电容器的电抗 $\frac{1}{\omega C_б}$ 和迴路的等效电阻 $\frac{L}{CR}$ 比較起来，应該十分小。

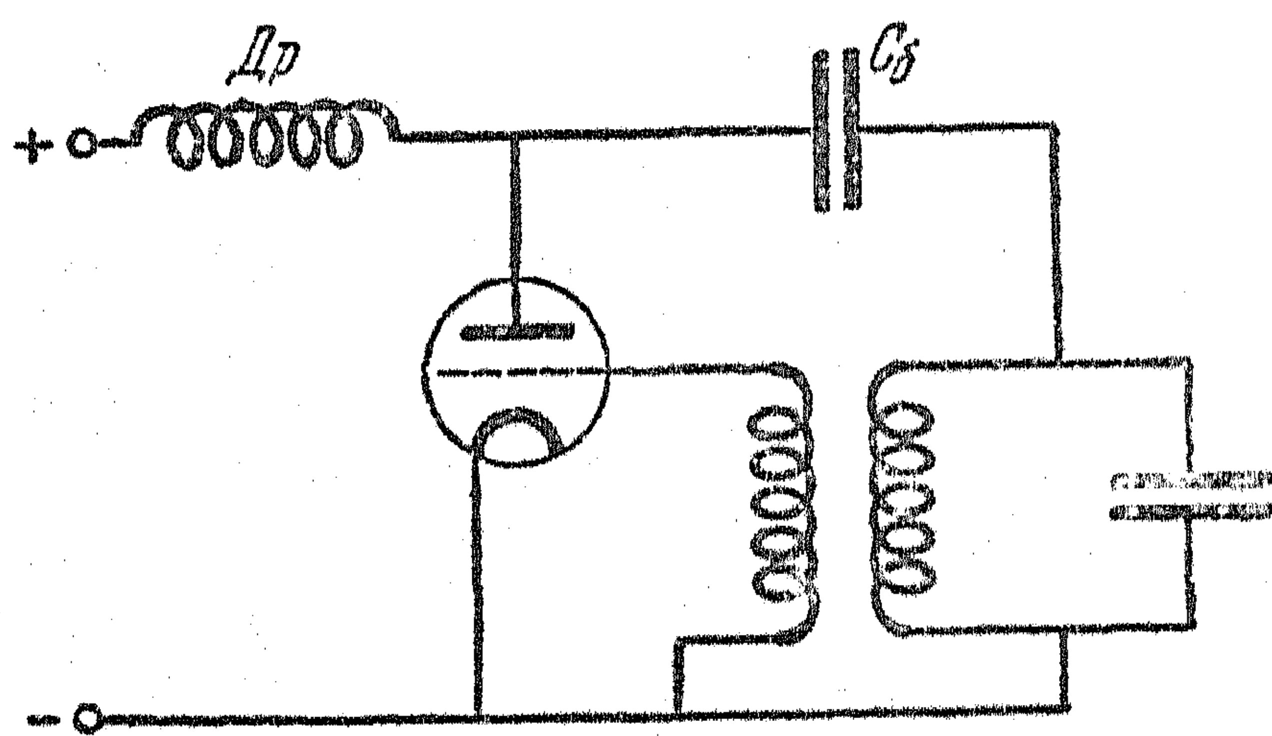


圖 151.

§ 52. 間歇自动振动

前面几节中，我們研究过近似諧振动的自动振动系統，在这种

系統的組成部分中，总含有品質因数很高的綫性振动系統(迴路)来作它的基本單元。当沒有反饋时，在基本振动系統中，可以作接近于諧振动的、輕微衰減的固有振动；在自动振动系統中有"反饋"时，基本單元决定着自动振动的頻率和波形。

然而，振动却不是总会如此的。例如，假使大大地減小迴路的品質因数，并增加"反饋"，那末，在振蕩器中所产生的自动振动狀态，也可能与諧振动有很大的区別。在一定的条件下，自动振动的特性与諧振动的区別將如此之大，以致振动差不多具有"間歇"振动的形式。这样的自动振动称为間歇振动，在这种振动中，某些振动的量發生着随时間的突变。当然，严格的說是不可能有这种振动的，但变化往往發生得如此之快，以致把它看作"突然"的变化比較接近于眞实。例如研究冲击时就是这么看的。实际上冲击并不是發生在瞬息間，受冲击的物体，其速度的变化也不是突然的，只是它变化得如此之快，以致对于絕大多数的現象可以充分正确地認为速度的变化是突然的。在間歇振动时，情形正是这样。古代就已知道的間歇噴水設备，可作为間歇振动系統的一个最簡單的例子，其簡圖如圖 152 所示。

曲管 B(虹吸管)嵌在漏斗 A 的塞子中。水由水龙头 C 注入漏斗；一旦水位达到一定的高度时，虹吸管就开始作用，于是水將由漏斗中流出。假如經过虹吸管的流量比由水龙头 C 注入的水多很多时，那末，經过一些时間以后，水位將下降得如此之多，以致使虹吸管停止作用，于是又开始漏斗的重新积水。在漏斗中的水量 q 的振动过程，如圖 153, a 所示，而流量 $\dot{q}$ 的振动則如圖 153, $б$ 所示。

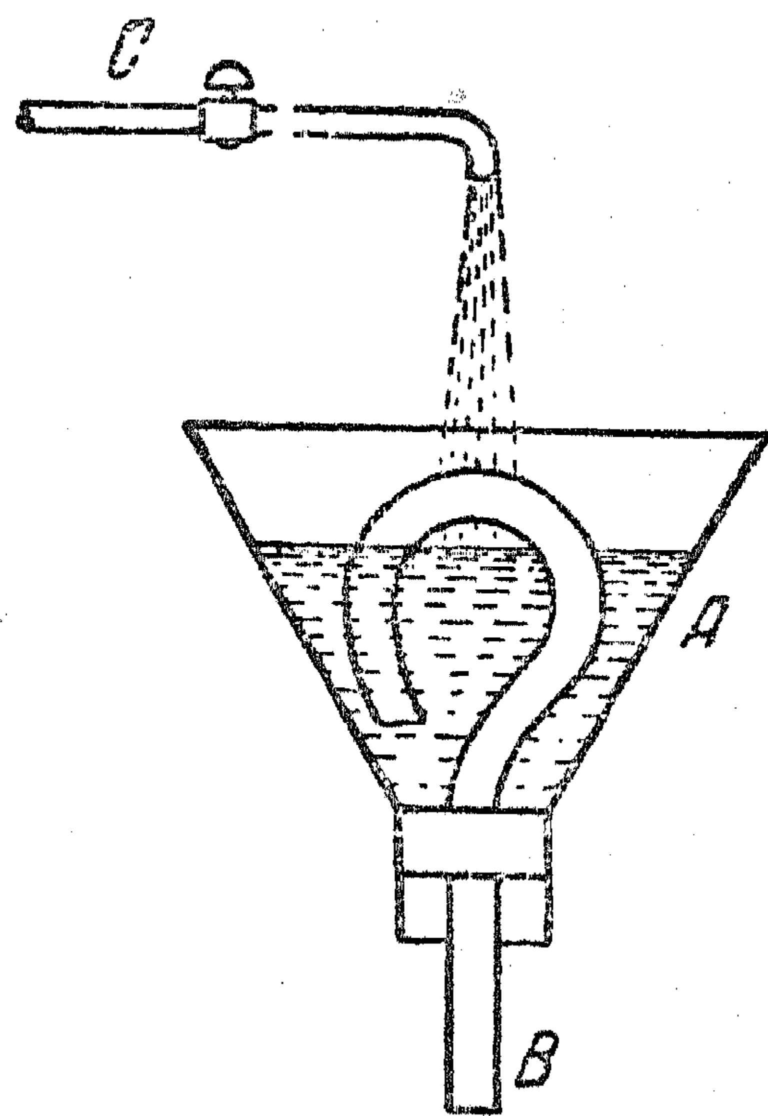


圖 152.

漏斗中的水量作連續变化的“鋸齿形”振动，而流量 $\dot{q}$ 作“突变”的振动。不待說，只有將在接通瞬間注入虹吸管的水的慣性忽略时，才可以大致認为流量的振动是突变的，以及自动振动是間歇的。振动的周期决定于漏斗的容量、經过水龙头的注水量，以及經过虹吸管的流量。

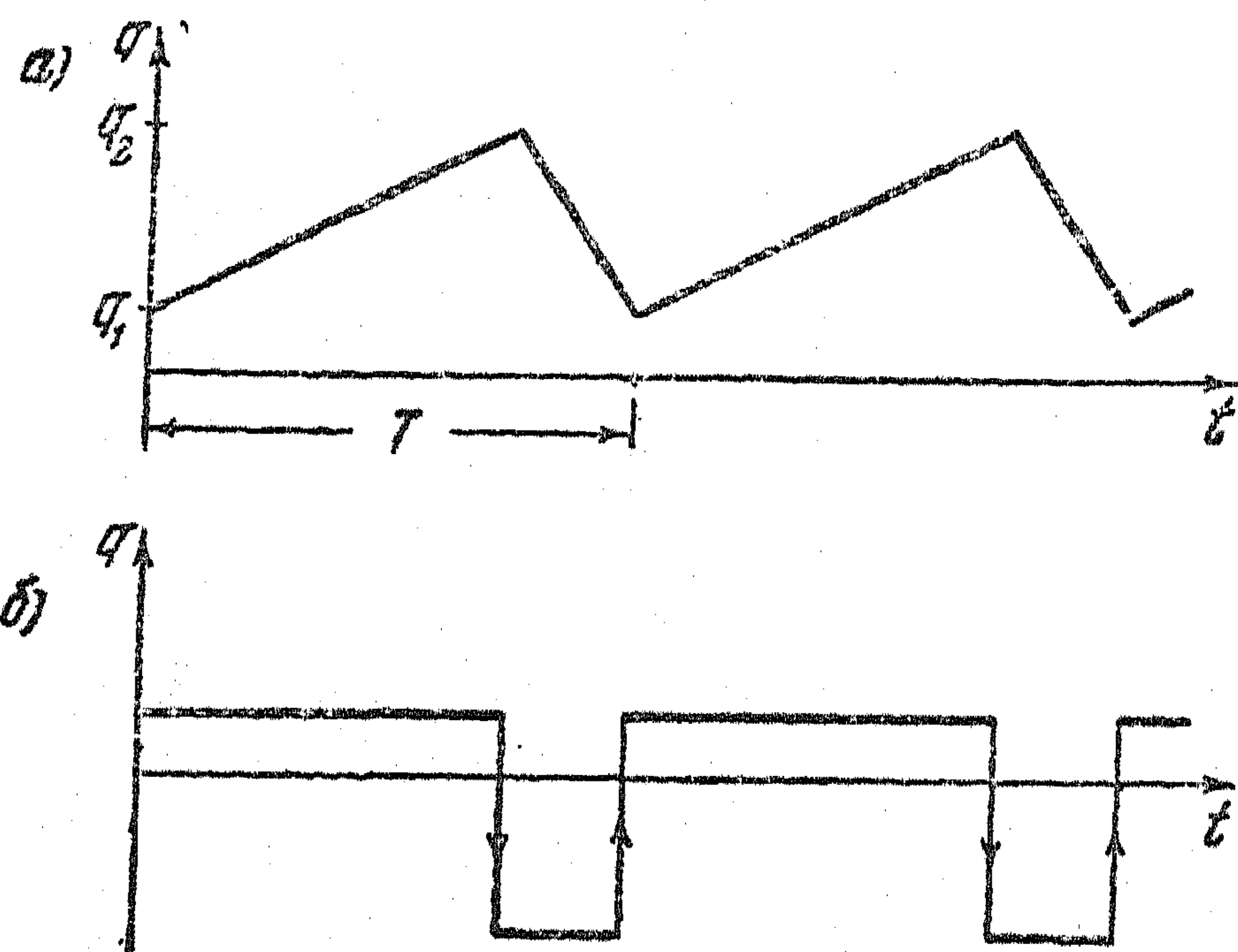


圖 153.

就根据这样簡單的原理，制作了一些产生鋸齿波振动的电气系統，以供各种不同目的的需要，而首先系供在陰極示波器中扫描的需要。例如在氖管綫路中的振动、閘流管綫路中的振动等等都具有这种特性。用閘流管的系統的綫路如圖 154 所示。直流电源經由二極管对电容器 C 充电，而与电容器幷联的是一閘流管，即一种具有控制柵極的充气管。振动过程是这样發生的：在接通电压以前，电容器未曾充电，閘流管中也沒有电流，在接通电压以后，电容器就經由二極管充电；二極管工作于飽和狀态，流过二極管的电流，在充电时間內实际上保持恒定，因此，在电容器上的电压（以及电荷 q）与时間成正比地增加。一俟电容器上的电压达到一定的値（这时电荷等于 q_2），閘流管起燃，电容器就通过它放电。閘流管的电流比二極管的电流大很多，因此电容器上的电压很快

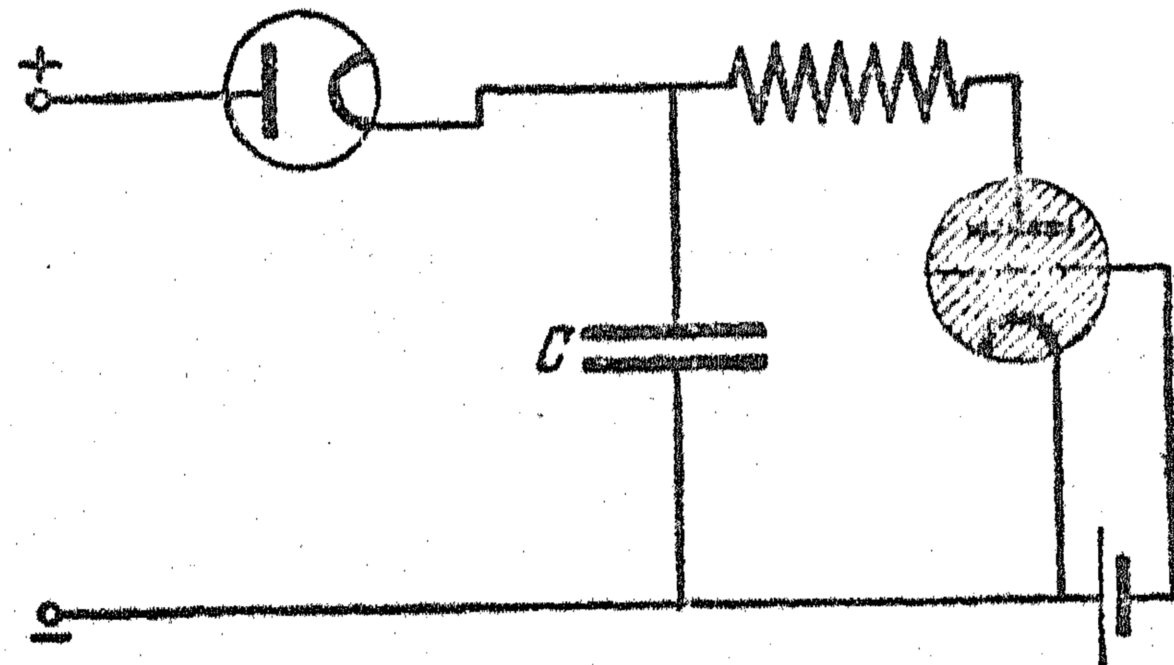


圖 154.

的下降，直到这样的值（电荷 q_1），这时閘流管熄燃，于是电容器的充电过程重新开始。显然，这里与間歇噴水設备完全相像：电容器上的电荷类似于漏斗中的水量，流过电容器的电流类似于水的流量，电容器的电容量类似于漏斗的容量。閘流管执行着虹吸管的作用。二極管执行着灌滿漏斗的水龙头的作用等等。电荷 q 和流过电容器的电流 $\dot{q}$ 的振动，具有与水量和水的流量的振动一样的形式，后者已表示于圖 153 上。假如电容器的电容量以及二極管和閘流管的特性曲綫是已知的，則計算振动的周期將沒有什么困难。

現在研究一个其中可能产生間歇振动的比較复杂的系統，即簡化了的 RC 振蕩器。这一系統令人感兴趣的还在于：改变系統中的参数，既容易得到接近于諧的自动振动，又容易得到間歇振动，以及不待說的，所有这兩者之間的振动。这种振蕩器的原理圖如圖 155 所示，和通常一样，这里我們將一些不重要的元件省略了。电子管 $Л_1$ 是振动系統的組成部分，并且是主要的电子管，$Л_2$ 是用来变更振动的相位的，并且設計得使它仅仅工作在其本身特性曲綫的直綫部分，因此，在第一个电子管的柵極上的交流电压 V_{c1} 將等于 kV_{c2}，其中 k 是电子管 $Л_2$ 的放大系数，V_{c2} 是在第二个电子管柵極上的交流电压。当忽略柵流，并注意到圖 155 上的表示符号时，便可以写出下列的方程式：

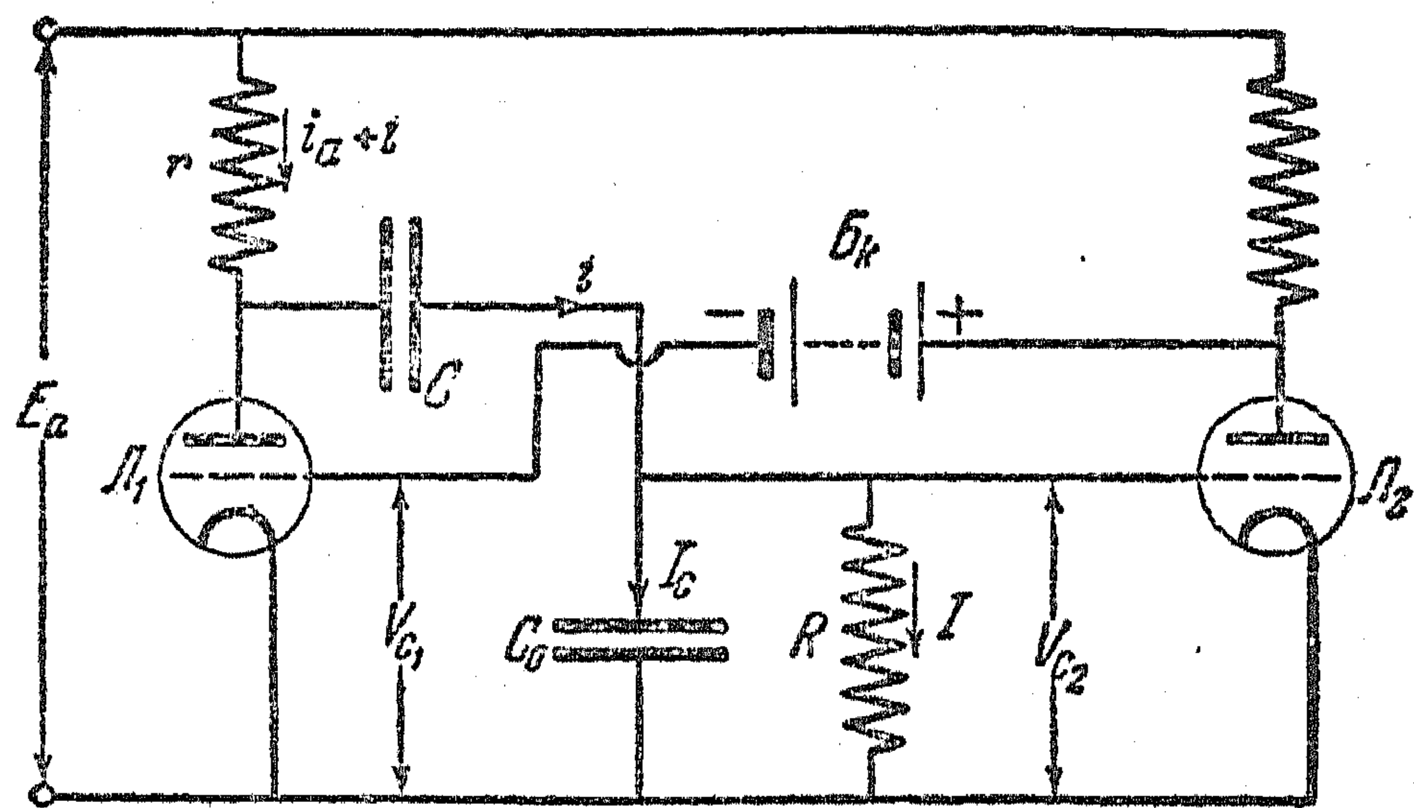


圖 155.

$$IR=\frac{1}{C_0}\int I_c dt,$$

$$i=I+I_{c},$$

$$IR+\frac{1}{C}\int i dt+(i+i_{a})r=0, \tag{52.1}$$

$$V_{c1}=-kV_{c2}=-kIR,$$

$$i_{a}=f(V_{c1})=f(-kIR),$$

这里所有的交流的量都代表由平衡值的歧离。將(52.1)中除了 I 以外的所有其余的量消去，我們便得到关于振动电流 I 的方程式，

$$rRC_{0}\dot{I}+\left[r+R\left(1+\frac{C_{0}}{C}\right)\right]I+rf(-kIR)+\frac{1}{C}\int I dt=0, \tag{52.2}$$

分析方程式(52.2)时，我們指出，假如工作在电子管 $Л_1$ 特性曲綫的直綫部分上，这时可以假設

$$f(-kRI)=-kSRI,$$

則方程式(52.2)代表某个等效振动迴路的綫性方程式。这一等效振动迴路的参数如下：

$$\text{电感量 } L_{эк}=rRC_{0}, \tag{52.3}$$

$$\text{电阻 } R_{эк}=r+R\left(1+\frac{C_{0}}{C}\right)-kSrR,$$

$$\text{电容量 } C_{эк}=C.$$

显然，对一些量的适当的选擇，而首先是对第二个电子管的放大系数 k 和第一个电子管的互导 S 的适当选擇，可以使等效迴路的电阻变得足够小，这时，电流 I 的固有振动將是近似諧的阻尼振动。

增加 k(或者 S)时，可以使电阻 $R_{эк}$ 成为負值，这时系統中的平衡狀态是不稳定的，并产生增長振动。換句話說，条件

$$R_{эк}<0,\ \text{或者}\ kS>\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\left(1+\frac{C_{0}}{C}\right) \tag{52.4}$$

代表在 RC 振蕩器(圖 155) 中振动的自激条件。假如在自激时，

$R_{\text{эк}}$ 的絕对値足够小，而电子管 $Л_1$ 的工作点大概位于特性曲綫的中点时，那末，在系統中將增長着接近于諧的振动，并和前面研究过的一般的振蕩器一样，会建立起近似正弦波形的自动振动狀态。自动振动的頻率將接近于等效迴路的頻率；这頻率不难由（52.3）求得，它大致等于：

$$\frac{1}{\sqrt{rRCC_0}}. \tag{52.5}$$

在这种情况下，圖 155 所示的系統代表着实际上为諧振动的 RC 类型的振蕩器。这种振蕩器在某些方面表現出一些优点，因而在最近期間得到了广泛的应用。

我們着重指出，在 RC 类型的振蕩器中电子管的作用与具振动迴路的振蕩器中电子管的作用，是有着重大的区別的。虽然圖 155 所示的綫路，当拆掉第一个电子管时（將其陰極加热电路断开），也代表一个具兩个自由度的系統，即由兩个含有电阻和电容的迴路所組成的系統，其中的电流振动也是由二阶的微分方程式来处理的，然而，其电流 I 的变化总会是“有限的”，或者說等效振动迴路將是“非周期性的”$\left(\text{迴路的 } Q<\frac{1}{2}\right)$。其次，若仅仅接上第一个电子管，而將电阻 R 直接接在这电子管的柵極上时，会使等效迴路的电阻增加。接上第二个电子管，相位便反过来，从而提供了減小等效振动迴路电阻的可能性（和在 52.3 中一样），于是，等效迴路就变成了品質因数很高的振动迴路。

由此可見，RC 振蕩器綫路，在效果上与已知的具振动迴路的振蕩器毫無区别。可是在这种綫路中，却很容易轉变为間歇自动振动，例如由減小电容器 C_0 的电容量来轉变。現在来研究当 $C_0=0$ 时，在圖 155 上所示的綫路中的振动。假定（52.2）中的 $C_0=0$，这就表示等效迴路的电感量趋于零，我們由（52.2）中便得到电流 I 振动的方程式。它具有下列形式：

$$(r+R)I+rf(-kRI)+\frac{1}{C}\int Idt=0. \qquad (52.6)$$

用 q 代表由电容器 C 上的电流 I 所产生的电荷，或者

$$q=\int Idt,\ \dot{q}=I. \qquad (52.7)$$

那末方程式(52.6)可以改写为:

$$C(r+R)\dot{q}+rCf(-kR\dot{q})+q=0; \qquad (52.8)$$

上式提供了 $\dot{q}$ 和 q 的关系，也就是电荷 q 可能振动的相軌綫方程式。知道特性曲綫 $f(V_{c1})=f(-kR\dot{q})$ 的圖形时，便不难算出在相平面 $(q,\dot{q})$ 上的軌綫。为使制圖簡單起見，假設特性曲綫含有三根直綫(圖 156)。那末，假設自激条件(52.4)能滿足时，在相平面上的軌綫(52.8)將具有如圖 157 所示的形式，描迹点的运动用矢标出。因此，在系統中的振动將这样进行，以致描迹点沿着折綫 $CAOBD$ 运动。可是在相平面上其余的点，究竟是怎么回事呢？关

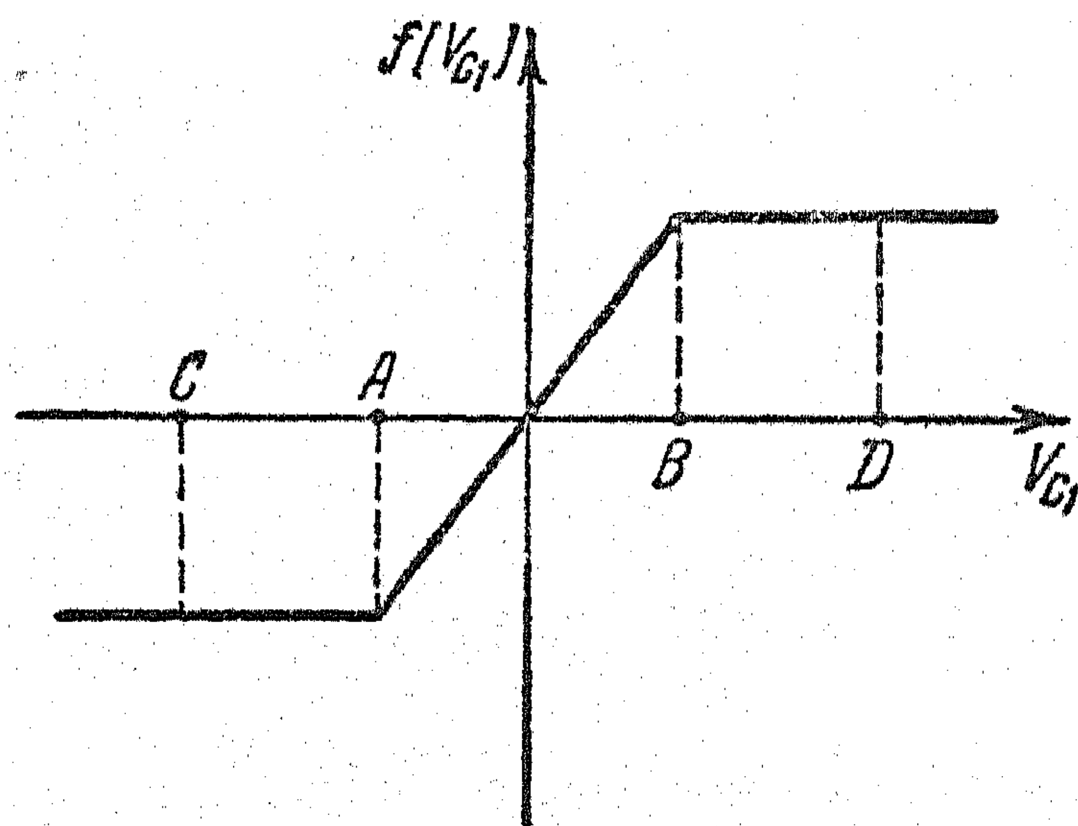


圖 156.

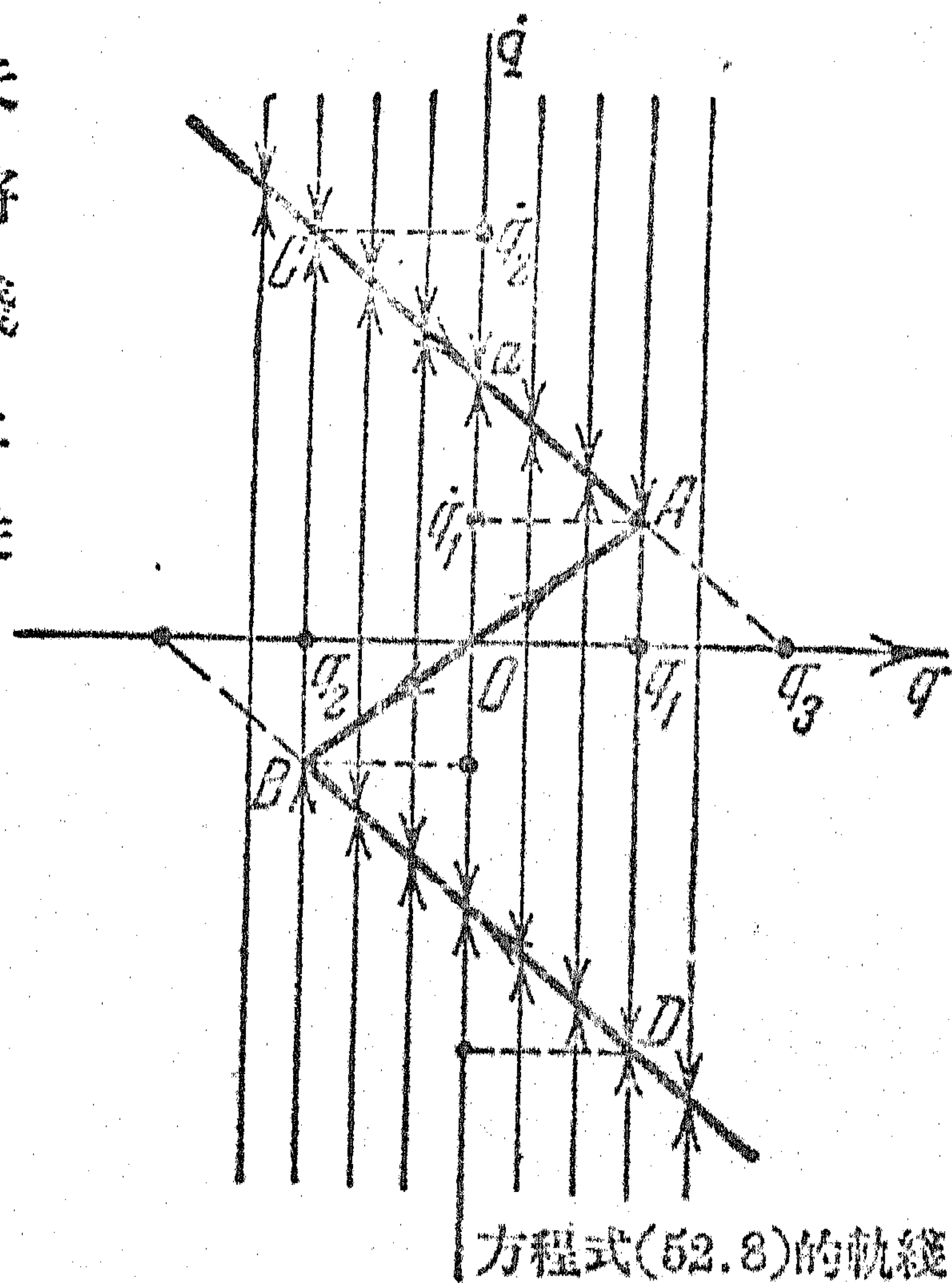


圖 157.

于这，我們由方程式(52.8)是不能知道什么的，因为这一个一阶方程式旣只含有一个任意常数，相平面便退縮为如圖 157 所繪的一些綫段。因此，讓我們再回到二阶方程式(52.2)，并研究当 $C_0\to 0$

时，是如何由(52.2)得到一阶方程式(52.6)的。根据方程式(52.6)及(52.2)，在 $CAOBD$ 折綫上，当 $C_0 \to 0$ 时，电流 $I=\dot{q}$ 具有某个有限的値，这値可以由解方程式(52.6)求得。在相平面$(q, \dot{q})$上其余的点，当 $C=0$ 时，由方程式(52.2)推出 $\dot{I}=\ddot{q}\to\infty$，这是因为在这些点，方程式(52.6)不成立，于是(52.2)的第一項，当 $C_0 \to 0$ 时，应該是有限値。因此，在相平面上其余的点將是运动的極端情形，在这种情形下，电流变化的速率 $\frac{d(\dot{q})}{dt}$ 为無穷大，也就是"电流突变"。換句話說，当 $C_0 \to 0$ 时，方程式(52.2)的相軌綫，退縮为一些与 $\dot{q}$ 軸平行的直綫，而描迹点便沿着这些直綫"瞬时地运动着"。將(52.2)与(52.6)加以比較时，不难确信，在 $CAOBD$ 折綫的右边，"突变"是朝下$(\ddot{q}=-\infty)$进行的；而在这綫的左边，"突变"是朝上$(\ddot{q}=+\infty)$进行的。

現在可以想像描迹点由原点，即由平衡位置起始的各种的运动，同时也可以想像振动过程。描迹点可能由原点沿直綫 OA 或沿直綫 OB 出去，但因为沿这兩条綫的运动是不稳定的，因此，随便多小的歧离都会使描迹点突变到 CA 段上（或者到 BD 段上）。而点沿这一段的运动是稳定的，于是点便会运动到点 A(或者到点 B)，到达点 A 时，描迹点便进到不稳定的区域，于是应該突变到 BD 段上。此后沿着 BD 段运动，直到在 B 点作突变为止等等。因此，系統中会产生与"圈" $CADBC$ 相对应的周期运动，这运动包含着 q 和 $\dot{q}$ 在 CA 和 DB 段的均匀变化以及由点 A 到点 D 和由点 B 到点 C 的突变。

知道在相平面上的"圈"时，便可以决定电容器上的电荷 q 的以及电流 $\dot{q}=I$ 的变化。因为 CA 及 DB 这兩段是直綫，在这些直綫上 $\dot{q}=-mq+n$，其中 m 和 n 是已給常数，那末，当描迹点沿这兩段运动时，电荷 q 將按指数規律变化，例如，对于由点 C 开始的一段，$q=\dot{q}_2 e^{-mt}+q_3(1-e^{-mt})$，$\dot{q}_2$ 及 q_3 的値可由圖 157 上看出。用

这种方法所求得的电流与电荷变化的曲綫如圖 158, *a* 及 *б* 所示。

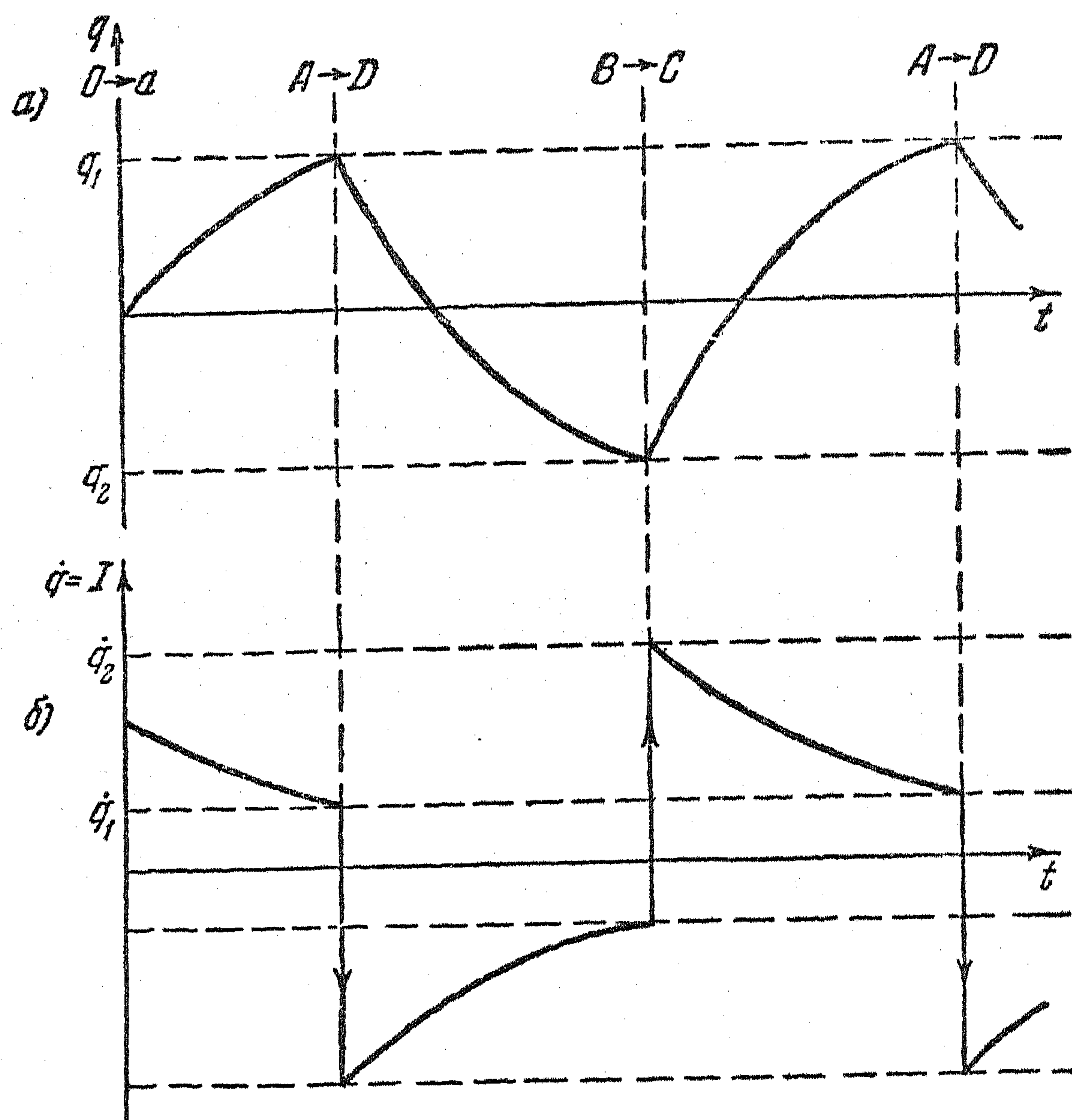


圖 158.

研究这些曲綫以及相平面上的圈时，我們看到，振动是这样發生的：当电子管 $Л_1$ 或是完全截止时——当由点 C 向点 A 运动时，或是工作在飽和狀态时——当由 D 点向 B 点运动时，电容器 C 充电或是放电。在接通綫路以后，电容器的充电开始(沿着 aA 运动)，在电流的突变以后，充电电流下降，于是，电子管 $Л_2$ 的柵極电压以及这一电子管的板流同充电电流一起下降，因此 $Л_2$ 的板極电压上升，并使 $Л_1$ 的柵極电压 V_{c1} 也上升，当到达特性曲綫下面的弯曲部分的点(A 点)时，电容器的充电电流突变($A \to D$)，电容器开始放电，电子管 $Л_2$ 的柵压变为負値，并由于放电电流下降，使在 $Л_2$ 柵極上的負电压减小，因而，第二电子管的板压 $=V_{c1}$ 下降(沿 DB 运动)，之后电流突变($B \to C$)，而重新开始电容器的充电。电

子管的板压与电流作突变;在电流向上作突变以后,当电容器 C 充电时,第一电子管的板極电压 E_a-Ir 增加;当电容器放电时,因为 I 具有相反的方向,板压 E_a-i_ar+Ir 下降。因此在这一系統中,也和在最简單的系統(圖 154)中一样,随着电子管 $Л_1$ 的"截止"与"开放",依次地發生充电与放电,但是,充电的过程通过电子管 $Л_2$"引起"电子管 $Л_1$ 的"开放"。以及反过来,而这时就产生突变。这一复杂的系統,在原理上,跟虹吸管的間歇噴水設备一样地操作,就是在其他作間歇振动的系統中,也是这种情形。

最后,我們指出,間歇振动仅仅表明实际过程的一个輪廓,实际上,电流突变並不是發生在瞬息間,而是發生得十分快,在突变时,小的电容量具有重要的意义,所以描迹点在相平面上的路徑並不与 $\dot{q}$ 軸平行,而是有些向外弯曲,但这种弯曲很小,因此可以近似的把它当作是直綫,再圖 158 所示的电流的突变也不是瞬时的,但占据一些时間的电流变化是相当快的。还要强調指出的是,为了正确地分析間歇振动,必須研究由方程式(52.2)变到方程式(52.6)的極端情形,只有这时,我們才能够理解当突变时所發生的現象。

当均匀地变化 C_0 到零时,假如在相平面上把圖形的相当复杂的变化作出来,便能够十分清楚地想像出各种运动。不过,总要注意到把这种类型的自动振动簡化为間歇振动后,所帶来的一些重大的优点:間歇振动的理論比連續振动的准确理論要簡單得多,同时这个理論对于鋸齿形振蕩器的实际計算,也能給出一个足够准确的結果。

統一書号 13010·207
定价 ¥0.85